Ключи муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике
2021-2022 учебный год
10 класс
Продолжительность олимпиады: 235 минут.

Код участника:____________________

Критерии оценивания работ участников:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Максимально возможное количество баллов за каждое задание: 7 баллов
Максимальное количество баллов по всем возрастным параллелям – 35 баллов.
Итог подводится по сумме баллов, набранных участником.

10.1. Ученику прислали задание, состоящее из 20 задач. За каждую верно решенную задачу ему ставят 8 баллов, за каждую неверно решенную – минус 5 баллов, за задачу, которую он не брался решать – 0 баллов. Ученик получил в сумме 13 баллов. Сколько задач он брался решать?

Решение.

Пусть x – количество правильно решенных задач, y – неправильно решенных. Тогда получаем уравнение $8x-5y=13$. Решить это уравнение можно двумя способами.
1 способ. Перепишем уравнение в виде $8(x+y)=13(1+y)$. Видим, что число $x+y$ делится на 13. С другой стороны, по условию $x+y$ не больше 20. Поэтому $x+y=13$ (при этом $x=6$, $y=7$).
Одно решение уравнения угадывается сразу: $x0=1$, $y0=-1$. При любом целом t пара чисел $x=1+5t$, $y=-1+8t$ тоже удовлетворяет этому уравнению.

Ответ*:* 13 задач.
Возможны другие способы решения.

Критерии: приведен только один верный ответ без обоснования -1 б.

10.2. Решите уравнение:

$$1+\frac{3}{x+3}\left(1+\frac{2}{x+2}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)\right)=x.$$

Решение*.*

$1+\frac{1}{x+1}=\frac{x+2}{x+1}$, поэтому данное уравнение равносильно уравнению $1+\frac{3}{x+3}\left(1+\frac{2}{x+1}\right)=x$ при условии, что x ≠ - 2. Действуя аналогично, получим, что $1+\frac{3}{x+3}=x$, где x ≠ - 2 и x ≠ -3. Корнями этого уравнения являются числа 2 и -2, значит корнем исходного уравнения является только число 2.

Критерии проверки

- Приведен только верный ответ – 1 балл.
- Верный ход решения, но не отброшен посторонний корень – 3 балла.

10.3. При изготовлении партии из $N \geq 5$ монет работник по ошибке изготовил две монеты из другого материала (все монеты выглядят одинаково). Начальник знает, что таких монет ровно две, что они весят одинаково, но отличаются по весу от остальных. Работник знает, какие это монеты и что они легче остальных. Ему нужно, проведя два взвешивания на чашечных весах без гирь, убедить начальника в том, что фальшивые монеты легче настоящих, и в том, какие именно монеты фальшивые. Может ли он это сделать?

Решение

Пусть m1 и m2 – фальшивые монеты, m3, m4 и m5 – какие-то три из настоящих монет. Работник делает два таких взвешивания: m1 ∨ m3, m4+m5 ∨ m2+m3.

В результате начальник убеждается, что m1 легче m3 и что среди монет m4 и m5 тяжелых монет больше, чем среди m2 и m3. Таким образом, он делает вывод, что m3, m4 и m5 – тяжелые монеты, а m1 и m2– легкие. Поскольку он знает, что фальшивых монет ровно две, то понимает, что фальшивыми являются именно легкие монеты m1 и m2.

Ответ*:* Может.

10.4. Углы треугольника связаны соотношением $\sin\alpha = 2\sin\beta * \cos\gamma$.

Доказать, что треугольник равнобедренный.

Решение. $2sin\beta\, cos\gamma = \sin\alpha = \sin(\pi-(\beta+\gamma)) = \sin(\beta+\gamma) = \sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma$. Отсюда $sin\beta\, cos\gamma = \cos\beta\sin\gamma$. Следовательно, $\sin(\beta-\gamma) = \sin\beta\cos\gamma - \cos\beta\sin\gamma = 0$, откуда $\beta=\gamma$.

10.5. Проведено три семейства параллельных прямых, по 10 прямых в каждом. Какое наибольшее число треугольников они могут вырезать из плоскости?

Решение. Рассмотрим 100 узлов — точек пересечения прямых первого и второго направлений. Разобьем их на 10 уголков: первый уголок – узлы, лежащие на первых прямых первого и второго направления. Второй – лежащие на вторых прямых (кроме точек, лежащих в первом уголке) и т. д. Треугольники со сторонами, параллельными трем фиксированным направлениям, могут иметь две ориентации, причем каждый из наших 100 узлов может быть вершиной не более одного треугольника каждой ориентации. Поэтому 10 прямых третьего направления образуют не более 2·25 треугольников с последними пятью уголками, так как эти пять уголков содержат всего 25 узлов.

Заметим далее, что каждая из прямых третьего направления образует не более одного треугольника каждой ориентации с узлами, принадлежащими одному уголку. Поэтому

треугольников, имеющих вершины в узлах остальных пяти уголков, будет не больше $10 \cdot 2 \cdot 5$.
Итого треугольников не более 100 + 50 = 150.
Пример со 150 треугольниками приведен на рисунке.
Ответ*:* 150 треугольников