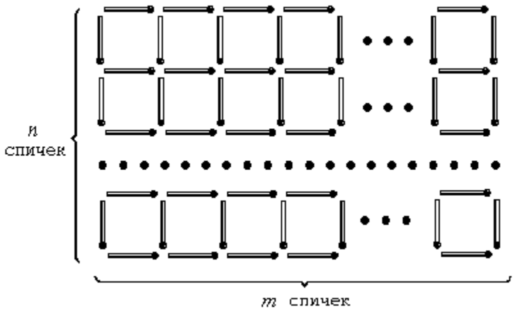
Условия и решения задач

(районная математическая олимпиада 2021 г.)

11 класс

1. Из спичек выложен прямоугольник размером $m\times n$ ($m > n$), состоящий из квадратов 1×1 (рис. 22.54а). а) Сколько спичек пошло на его построение, если считать, что длина спички равна 1? б) Сколько всевозможных прямоугольников, составленных из данных спичек, можно насчитать в этой фигуре? в) Сколько всевозможных квадратов, составленных из данных спичек, можно насчитать в этой фигуре?



Решение. а) Пусть m - длина прямоугольника, n - высота. Тогда по вертикали будет расположено $n\cdot(m+1)$спичек, а по горизонтали – $m\cdot(n+1)$ спичек. Следовательно, для построения такого прямоугольника потребуется $n(m+1)+m(n+1) = 2mn+m+n$ спичек.

б) Вдоль одной вертикальной стороны будет расположено: n прямоугольников размером 1×1; n-1 прямоугольник размером 1×2; n-2 прямоугольников размером 1×3; ...; 2 прямоугольника размером $1\times(n-1)$; 1 прямоугольник размером $1\times n$; т.е. всего $1+2+3+...+(n-1)+n = n(n+1)/2$ прямоугольников. Аналогично рассуждая, получим, что вдоль одной горизонтальной стороны будет расположено $m(m+1)/2$ прямоугольников. Следовательно, можно насчитать $m(m+1)n(n+1)/4$ прямоугольников, составленных из данных спичек.

в) Не трудно видеть, что можно насчитать всего:

mn квадратов размером 1×1,

$(m-1)(n-1)$ квадратов размером 2×2,

$(m-2)(n-2)$ квадратов размером 3×3,

..................……………………………..........

$(m-(n-2))(n-(n-2))$ квадратов размером $(n-1)\times(n-1)$,

$(m-(n-1))(n-(n-1))$ квадратов размером $n\times n$,

следовательно, в итоге, можно насчитать $mn + (m-1)(n-1) + (m-2)(n-2) + ... + (m-(n-2))(n-(n-2)) + (m-(n-1))(n-(n-1)) = mn + (mn-m-n+1) + (mn-2m-2n+4) + (mn-3m-3n+9) + ... + (mn-(n-2)m-(n-2)n+(n-2)^2) + (mn-(n-1)m-(n-1)n+(n-1)^2) = nmn - m(1+2+3+ ... +(n-1)) + n(1+2+3+...+(n-1)) + 1^2+2^2+3^2+...+(n-1)^2 = n^2m - (m+n)((n-1)n/2) + (n-1)n(2n+1)/6 = n^2m-((n-1)n/2)\cdot(3m+3n-2n+1)/3) = (6mn^2-(n-1)n(3m+n+1))/6 = (6mn^2-3mn^2-n^2+3mn+n-n^3+n^2)/6 = (3mn^2+3mn-n^3+n)/6 = (3mn(n+1)-n(n^2-1))/6 = n(n+1)(3m-n+1)/6$ квадратов

Ответ: а) $2mn+m+n$ спичек; б) $m(m+1)n(n+1)/4$; в) $n(n+1)(3m-n+1)/6$.

2. Решите неравенство $2\cdot5^{2x}\cdot\sin2x-3^x\ge5^{2x}-2\cdot3^x\cdot\sin2x.$

Решение. Преобразуем неравенство:

$$5^{2x}(2\sin2x-1)\ge-3^{2x}(2\sin2x-1)\Rightarrow(5^{2x}+3^{2x})(2\sin2x-1)\ge0\,.$$

Заметим, что $5^{2x} + 3^{2x} > 0$ при любом $x \in \mathbf{R}$, значит, данное неравенство равносильно неравенству $(2\sin 2x - 1) \geq 0$, решив которое, найдем $\frac{\pi}{12} + 2\pi k \leq x \leq \frac{5\pi}{12} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{12} + 2\pi k \leq x \leq \frac{5\pi}{12} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

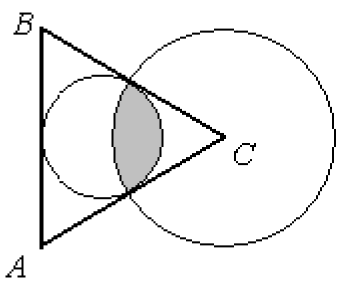
3. Пусть $A = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 ... (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 ... 2n}$, где n – целое положительное число. Докажите, что в последовательности A, $2A$, $4A$, $8A$, …, $2^k \cdot A$, …, с некоторого места встречаются только целые числа.

Доказательство. Умножив числитель и знаменатель дроби A на 2, 4, 6 … ($2n$-2), получим $A = \frac{(2n-1)!}{(2^{n-1}(n-1)!)^2\, 2n} = \; = \frac{1}{2^{2n-1}} \cdot \frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!} = \frac{1}{2^{2n-1}} \cdot C_{2n-1}^{n-1}$ где C_{2n-1}^{n-1}- целое число. Следовательно, начиная с $2^{2n-1} \cdot A$, в последовательности A, $2A$, $4A$, $8A$, …, $2^k \cdot A$, …, будут встречаться только целые числа. Что и требовалось доказать.

4. В равностороннем треугольнике со стороной a вписана окружность. Из вершины треугольника радиусом $0{,}5a$ проведена вторая окружность. Найдите площадь, заключенную между этими окружностями.

Решение. Пусть ABC данный равносторонний треугольник, сторона которого равна a. Сделаем необходимые построения (см. рисунок). Тогда искомая площадь разность между площадью сектора в 60° второй окружности и разности трети площади треугольника и вписанной в него окружности. Площадь сектора $S_c = \frac{1}{6}\pi(0{,}5a)^2 = \frac{\pi a^2}{24}$, площадь треугольника $S_\Delta = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$, площадь вписанной окружности $S_o = \frac{\pi a^2}{12}$. Значит, искомая площадь $S = S_c - \frac{1}{3}(S_\Delta - S_o) = \frac{\pi a^2}{24} - \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}a^2}{4} - \frac{\pi a^2}{12}\right) = \frac{a^2}{72}\left(5\pi - 6\sqrt{3}\right)$.

Ответ: $\frac{a^2}{72}\left(5\pi - 6\sqrt{3}\right)$ кв. ед.



5. Каково должно быть k для, того, чтобы неравенство

$$\left|\frac{x^2 - kx + 1}{x^2 + x + 1}\right| < 3$$

справедливо при любом значении x?

Решение. ОДЗ: $x \in \mathbf{R}$, т.к. $x^2 + x + 1 > 0$ при любом действительном x. Поэтому данное неравенство равносильно неравенству

$$-3 < \frac{x^2 - kx + 1}{x^2 + x + 1} < 3,$$

которое (если освободится от положительного знаменателя) приводится к следующей системе

$$\begin{cases} 2x^2 + (3+k)x + 2 > 0, \\ 4x^2 - (k-3)x + 4 > 0. \end{cases}$$

Чтобы неравенства системы выполнились одновременно для всех x, необходимо и достаточно, чтобы дискриминанты трёхчленов, стоящих в левых частях неравенств, были отрицательны, т.е. чтобы выполнялась система

$$\begin{cases} (3+k)^2 - 16 = (k+7)(k-1) < 0, \\ (k-3)^2 - 64 = (k+5)(k-11) < 0. \end{cases}$$

решив которую, найдем $k \in$ [-5; 1].

Ответ: $k \in$ [-5; 1].