11 класс

1. Решите в целых числах уравнение $1 + 2^n + 3^n + 5^n = 2k$.

Решение

При $n \geq 1$ слева получается нечетное число, а $2k$ четное, поэтому решений нет.
При $n = 0$ получаем $k = 2$.
При $n = -1$ получаем уравнение, которое не имеет целого решения для k.
При $n \leq -2$ выражение слева принимает значения большие 1, но меньшие 2. Поэтому целого решения уравнения для k нет.
Поэтому уравнение имеет единственное решение $n = 0$, $k = 2$.

Критерии оценивания

Только верный ответ - 1 балл.
Верно и полно рассмотрен случай неотрицательных значений n - 2 балла.
Верно и полно рассмотрен случай для отрицательных значений n - 4 балла.
Баллы суммируются.

2. Решить неравенство $\frac{\sin(cosx)}{\cos(sinx)} - 1 > 0$.

Решение

Рассмотрим разность $\cos(sinx) - \sin(cosx) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - sinx\right) - \sin(cosx) = 2cos\frac{\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4})}{2} sin\frac{\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})}{2}$, $0 < \frac{\pi - 2\sqrt{2}}{4} \leq \frac{\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}sin\alpha}{2} \leq \frac{\pi + 2\sqrt{2}}{4} < \frac{\pi}{2}$, Таким образом, угол $\frac{\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}sin\alpha}{2}$ положителен и лежит в первой четверти. Значит, полученное произведение косинуса на синус положительно и разность также положительна. Следовательно, $\frac{\sin(cosx)}{\cos(sinx)}$<1, и исходное неравенство решений не имеет.

Критерии оценивания

Доказано, что неравенство решений не имеет - 7 баллов.
Выполнены промежуточные выкладки или оценки, важные для продвижения в решении - от 1 до 4 баллов.
Допущены ошибки в оценке значений синуса, косинуса или углов - не более 2 баллов.

3. Иван Царевичу нужно раздобыть молодильные яблоки. Баба Яга, Кощей и Леший дали ему следующие ответы.
Баба Яга: «Да у Кощея они. Забрал и уже 100 лет как не отдает. А Леший – добрый малый: если были бы они у него, то дал бы мне».
Кощей: «Баба Яга – плутовка, спрятала, у нее они, а у меня их нет».
Леший: «Нет у меня их. Зачем они мне? Я и без них красивый. И у Бабы Яги их нет: совсем старая стала».
Василиса Премудрая предупредила Ивана, что вся эта троица – врунишки, правды никто из них никогда не скажет, а молодильные яблоки хотя бы у одного из них есть.
У кого есть молодильные яблоки? У кого их нет? О ком недостаточно информации? (Утверждение «А и В» ложно тогда и только тогда, когда ложно хотя бы одно из утверждений А или В)?

Решение

По показаниям Кощея делаем вывод, что у Бабы Яги яблок нет или у него они есть.
Рассмотрим случай, что у Бабы Яги яблок нет.
Тогда Леший в одной части своих показаний про Бабу Ягу не соврал. Поэтому показания Лешего о том, что у него яблок нет – ложь. Таким образом, устанавливаем, что яблоки у Лешего. Показания Лешего соединены связкой «и», поэтому для их ложности достаточно ложности одного из условий.

Баба Яга в одной части своих показаний утверждает, что «Если яблоки есть у Лешего, то есть и у нее». А поскольку у Лешего они есть, а у нее их нет, как было установлено из показаний остальных фигурантов дела, то в этой части своих показаний Баба Яга солгала. Значит, показания о Кощее могут быть правдой, а могут быть ложью, поскольку оба своих утверждения Баба Яга также соединила связкой «и».
Таким образом, у Лешего яблоки есть, у Бабы Яги их нет, а по Кощею недостаточно информации.
Рассмотрим случай, что у Кощея яблоки есть, тогда Баба Яга в одной части своих показаний не соврала, тогда вторая часть ложь, то есть у Лешего есть яблоки, а у нее их нет. Показания Лешего тогда тоже ложны, так как он утверждал, что у него яблок нет.
Таким образом, получаем, что у Лешего яблоки есть, у Бабы Яги их нет, а у Кощея есть.
Общий вывод: у Лешего яблоки есть, у Бабы Яги их нет, а по Кощею недостаточно информации.

Критерии оценивания

Только верный ответ - 0 баллов.
Есть только верное и полное объяснение того, что «у Бабы Яги их нет» - 2 балла.
Есть только верное и полное объяснение того, что «у Лешего яблоки есть» - 2 балла.
Есть только верное и полное объяснение того, что «по Кощею недостаточно информации» - 2 балла.
Два случая из трех перечисленных – 4 балла.
Получен верный ответ и сделан полный перебор с обоснованиями – 7 баллов.
Верный ответ и сделан полный перебор, но допущена логическая ошибка (например, не указан один из случаев при том или ином условии) - 4 балла.
Верный ответ и сделан полный перебор, но отсутствует обоснование того или иного вывода (например, в одном из случаев не соотнесены все данные) - 4 балла.

4. Докажите, что для любого натурального n верно неравенство

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}<1$$

Решение

Найдем компактное выражение для суммы $\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

$$S_1=\frac{3}{4}$$

$$S_2=\frac{3}{4}+\frac{5}{36}=\frac{8}{9}$$

$$S_3=\frac{8}{9}+\frac{7}{144}=\frac{15}{16}$$

и т.д. Отсюда предполагаем, что $S_n=\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}$.
Докажем это равенство с помощью метода математической индукции.
База индукции выполняется.
Докажем индукционный шаг: если $S_n=\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}$, то $S_{n+1}=\frac{(n+2)^2-1}{(n+2)^2}$.
Действительно,

$$S_{n+1}=S_n+\frac{2(n+1)+1}{(n+1)^2(n+2)^2}=\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}+\frac{2(n+1)+1}{(n+1)^2(n+2)^2}=\frac{(n+2)^2-1}{(n+2)^2}$$

Неравенство $\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}<1$ верно, поскольку числитель меньше знаменателя.

Критерии оценивания

Проверка справедливости неравенства для нескольких первых слагаемых – 0 баллов.
Формула $S_n=\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}$ получена, но не доказана – 4 балла.
Верное и полное решение – 7 баллов.

5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ AB=1см, AD=2, AA_1=1. Найти наименьшую площадь треугольника PA_1C, вершина P которого лежит на прямой AB_1.

Решение

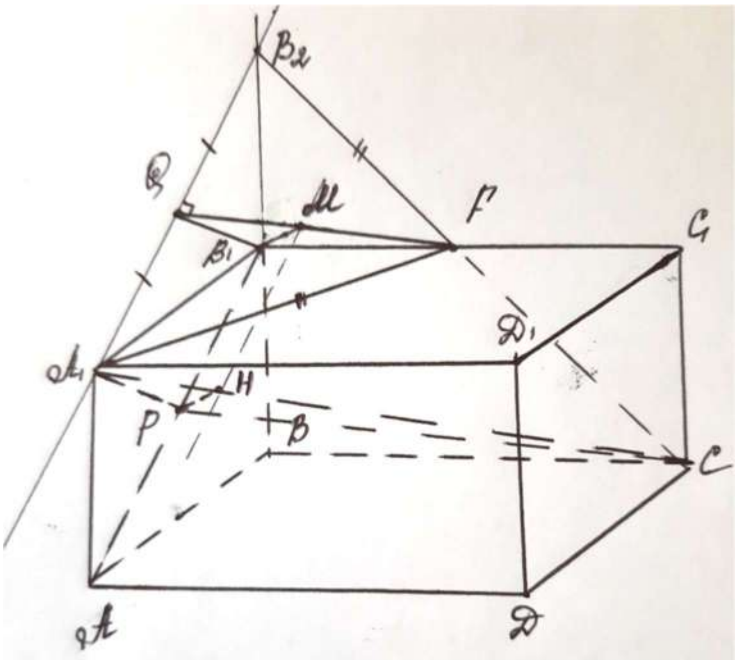
Площадь треугольника PA_1C равна $S = \frac{1}{2} A_1C \times PH$, где PH- расстояние от точки P, взятой на прямой AB_1, до прямой A_1C. Площадь будет наименьшей при наименьшем значении длины отрезка PH, то есть в том случае, когда PH - общий перпендикуляр к прямым A_1C и AB_1.

Построим общий перпендикуляр к прямым A_1C и AB_1. Через прямую A_1C построим плоскость параллельную прямой AB_1. Для этого через точку A_1 проведем прямую параллельную AB_1 . Точка B_2 - точка пересечения этой прямой с прямой BB_1. Искомая плоскость (A_1B_2C).

Рассмотрим плоскость (QB_1F): прямая QB_1 перпендикулярна прямой A_1B_2, которая в свою очередь параллельна прямой AB_1, прямая B_1F перпендикулярна прямой AB_1. Значит плоскость (QB_1F) перпендикулярна прямой AB_1.

Проекцией прямой AB_1 на плоскость (QB_1F) является точка B_1, а прямой A_1C на эту же плоскость - прямая QF. Значит искомое расстояние между скрещивающимися прямыми A_1C и AB_1 равно высоте треугольника QB_1F, опущенной из вершины B_1 к стороне QF. На чертеже это отрезок B_1M.

Из треугольника $A_1B_2B_1$ находим $QB_1= \frac{\sqrt{2}}{2}$. Из треугольника B_1FQ находим $B_1M== \frac{\sqrt{3}}{3}$. Таким образом, искомая площадь $S = \frac{1}{2} A_1C \times PH = \frac{\sqrt{6}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Критерии оценивания

На основе правильных рассуждений получен верный ответ - 7 баллов.

Получен вывод, что площадь будет наименьшей при использовании в качестве высоты треугольника расстояния между скрещивающимися прямыми A_1C и AB_1 -1 балл.

Верно указан (построен) отрезок длина которого является расстоянием между прямыми A_1C и AB_1 - 3 балла.