Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

2021-2022 уч.год

11 класс

Решения и ответы

1. При каких значениях a уравнения

$$x^2 + ax + 1 = 0 \qquad \text{и} \qquad x^2 + x + a = 0$$

имеют хотя бы один общий корень?

Решение. Пусть x_0 – общий корень уравнений. Подставляем в уравнения, приравниваем выражения для x_0^2.

$$\begin{cases} x_0^2 + ax_0 + 1 = 0, \\ x_0^2 + x_0 + a = 0 \end{cases} \qquad ax_0 + 1 = x_0 + a$$

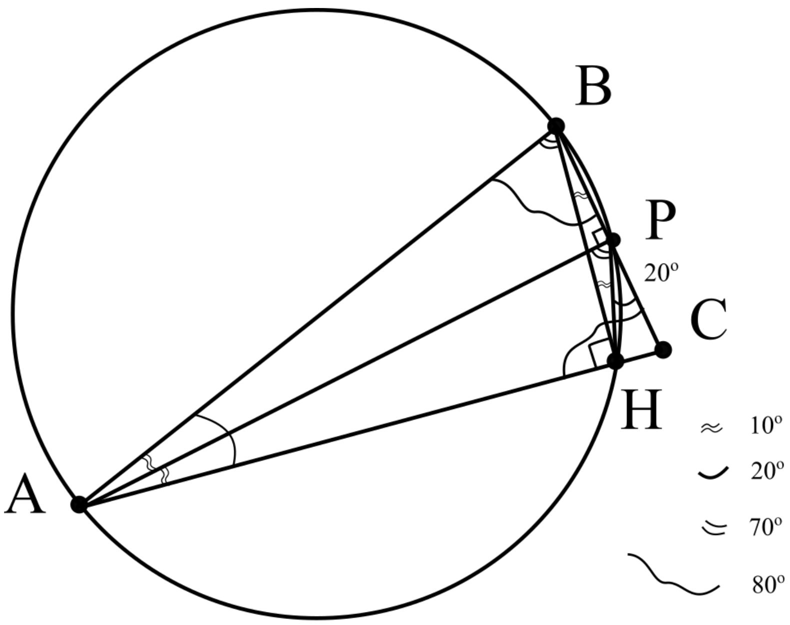
$$(a-1)x_0 = a - 1 \qquad (a-1)(x_0 - 1) = 0$$

Получаем два варианта. При $a = 1$ уравнения совпадают, $x^2 + x + 1 = 0$ корней не имеет. При $x_0 = 1$ подстановкой получаем $a = -2$.

Ответ. При $a = -2$.

2. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH и биссектриса AP. Найдите углы этого треугольника, если известно, что вокруг четырехугольника $ABPH$ можно описать окружность, и $\angle CPH = 20°$.

Решение.



Угол $\angle AHB$ – вписанный и прямой, поэтому AB – диаметр окружности, описанной вокруг четырехугольника $ABPH$. Получаем, что угол $\angle APB$ также прямой. Так как $\angle CPH = 20°$, то $\angle APH = 70°$. Из этого далее находим, что $\angle ABH = 70°$, он опирается на ту же дугу, что и $\angle APH$. Теперь в прямоугольном треугольнике ABH мы знаем два угла, можем найти угол $\angle BAH$. Получаем $\angle BAH = 20°$. Из того, что AP – биссектриса этого угла, следует, что $\angle BAP = \angle HAP = 10°$. Углы $\angle HAP$ и $\angle HBP$

опираются на одну дугу, поэтому $\angle HBP = 10^\circ$. Можем найти оставшиеся углы треугольника. $\angle ABC = \angle ABH + \angle HBP = 70^\circ + 10^\circ = 80^\circ$. В треугольнике ABC биссектриса AP совпадает с высотой, поэтому он равнобедренный, и $\angle ABC = \angle ACB = 80^\circ$.

Ответ. $\angle ABC = \angle ACB = 80^\circ$, $\angle BAC = 20^\circ$.

3. Пусть $F(x)$ и $G(x)$ – многочлены степени 2021. Известно, что при всех вещественных x выполняется $F(F(x)) = G(G(x))$ и существует такое вещественное число $k, k \neq 0$, что при всех вещественных x выполняется $F(kF(F(x))) = G(kG(G(x)))$. Найдите степень многочлена $F(x) - G(x)$.

   Решение. Так как $F(F(x)) = G(G(x))$, то $F(kG(G(x))) = G(kG(G(x)))$. Это равенство выполняется при всех x, т.е. больше, чем при 2022 значениях переменной (Так как многочлен $G(x)$ принимает бесконечное число значений). Поэтому многочлены совпадают, их разность имеет степень 0.

   Ответ. Степень $F(x) - G(x)$ равна 0, многочлены совпадают.

4. Внутри треугольника отметили несколько точек. Точки соединили цветными отрезками так, что в каждой отмеченной точке сходится три отрезка, и каждая вершина треугольника соединена одним цветным отрезком с какой-то из отмеченных точек. Оказалось, что проведенные отрезки раскрашены в три цвета так, что в кажой отмеченной точке сходятся три отрезка разного цвета. Докажите, что отрезки, проведенные в вершины треугольника, окрашены в разные цвета.

   Решение. Пусть число отмеченных точек внутри треугольника равно n. Пусть из трех отрезков, соединяющих вершины треугольника с отмеченными точками, k_1 – число отрезков первого цвета, k_2 – число отрезков второго цвета, k_3 – число отрезков третьего цвета ($k_1 + k_2 + k_3 = 3$, $0 \leq k_i \leq 3$). Тогда число всех отрезков первого цвета равно $\dfrac{n + k_1}{2}$, число всех отрезков второго цвета равно $\dfrac{n + k_2}{2}$, число всех отрезков третьего цвета равно $\dfrac{n + k_3}{2}$. Здесь учтено, что когда мы считаем общее число отрезков, суммируя числа отрезков, сходящихся в каждой вершине, мы каждый отрезок учитываем дважды (*"число ребер равно половине суммы степеней всех вершин"*). В числителях дробей стоят четные числа. Поэтому числа k_1, k_2, k_3 имют одинаковую четность. Так как $k_1 + k_2 + k_3 = 3$, то они могут быть только нечетными, равными 1. Это доказывает, что отрезки, проведенные в вершины треугольника, имеют разные цвета. Попутно доказали, что такая раскраска невозможна, если отмечено четное число точек.

5. Пусть S – набор из n различных вещественных положительных чисел ($n \geq 3$). Докажите, что максимально возможное число различных натуральных степеней числа 3, которые могут быть представлены как сумма трех различных элементов S, равно $n - 2$.

   Решение.

   Доказательство оценки проведем методом математической индукции по n.

   База индукции при $n = 3$ вытекает из условия задачи и из существования единтвенной возможной суммы в этом случае.

   Добавим проверку базы при $n = 4$. Пусть имеются четыре числа a, b, c, d. Пусть d – наибольшее из этих чисел. Тогда выполняется неравенство для суммы трех чисел: $d < b + c + d < 3d$. На промежутке от d до $3d$ можно встретить только одну степень 3. Действительно, если предположить $d < 3^t < 3 \cdot 3^t < 3d$, то $\dfrac{d}{3^t} < 1$ (левое неравенство), тогда $3\dfrac{d}{3^t} < 3$ (умножили на 3), но $3 < 3\dfrac{d}{3^t}$ (правое неравенство). Поэтому d может войти в представление в виде суммы не более, чем одной степени 3 (любая сумма трех чисел меньше, чем $3d$, и ее не хватит, чтобы получить что-то большее, чем $3d$). Так как без d существует только одна сумма $a+b+c$, в случае множества S, состоящего из четырех чисел, можно получить не более двух степеней 3.

Выполним индукционный переход. Пусть для любого множества S, состоящего из n чисел, утверждение верно. Рассмотрим множество S_1, в котором на одно число больше (S и S_1 в общем случае отличаются набором чисел). Пусть снова d – наибольшее число, входящее в S_1. Рассуждая полностью аналогично, мы видим, что существует только одна степень числа 3, которую можно получить как $b+c+d=3^t$, где одно из слагаемых равно d. С другими слагаемыми можно получить не более, чем $n-2$ степеней тройки, по индукционному предположению (эти слагаемые образуют множество из n элементов, удовлетворяющее условию). Поэтому общее число степеней тройки, представимых в виде суммы трех элементов множества S_1, не больше $n-2+1=n-1$. Оценка сверху доказана.

Приведем пример, что такое множество можно построить. Пусть

$$S=\{1,2,3^2-3,3^3-3,\ldots,3^n-3\}$$

Каждый элемент 3^i-3 может участвовать ровно в одной сумме, дающей степень тройки (любые два или три не дают степень тройки, это проверяется сложением 3^i-3+3^j-3). Поэтому число таких сумм равно $n-2$.

Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

2021-2022 уч.год

11 класс

Критерии проверки

	Балл	За что ставится
Задача 1	7	Полностью верное решение.
	3	Не исключено из ответа значение $a = 1$.
	0	Неверное решение и (или) неверный ответ, не попадающий под критерии 3 балла.

	Балл	За что ставится
Задача 2	7	Полностью верное решение.
	5	Верное решение, имеющее незначительные недочеты в обосновании. Получены значения всех углов.
	1	Написано, что AB – диаметр. Дальнейшее продвижение отсутствует или неверно.
	0	Неверное решение и (или) неверный ответ.

	Балл	За что ставится
Задача 3	7	Полностью верное решение.
	5	Верное решение. Имеются неточности в обосновании.
	0	Неверное решение и (или) неверный ответ.

	Балл	За что ставится
Задача 4	7	Полностью верное решение.
	5	Верное решение. Имеются неточности в обосновании.
	3	Проведен подсчет отрезков одного цвета, применена идея четности – нечетности. Дальнейшее продвижение отсутствует или неверно.
	0	Неверное решение.

	Балл	За что ставится
Задача 5	7	Полностью верное решение.
	5	Проведено верное доказательство оценки методом математической индукции. Отсутствует пример множества, на котором достигается оценка. ИЛИ Верное решение. Имеются неточности в обосновании.
	3	Проведено доказательство оценки методом математической индукции, содержащее неточности. Отсутствует пример множества, на котором достигается оценка.
	1	Приводится пример, на котором показано выполнение условия задачи. Доказательство отсутствует.
	0	Неверное решение.