# Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2021 – 2022 учебном году

## Ответы и решения

## Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серъёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

4) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

5) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

6) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказательств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

7) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставляемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а

жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено. Финальная оценка является целым числом от 0 до 7.

8) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

9) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий: д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. +**79220350324**).

## Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2021 – 2022 учебном году
## 11 класс

*Время выполнения заданий — 4 часа*

**11.1.** *Учитель литературы решил выяснить у учеников из 11«А» класса, сколько человек из их класса отсутствуют. Он получил такие ответы: Петр: «Больше одного». Виктор: «Больше двух». Татьяна: «Больше трёх». Чарльз: «Больше четырёх». Полина: «Меньше четырёх». Шурик: «Меньше трёх». Сколько человек в 11«А» классе отсутствует на самом деле, если ровно три ученика сказали правду? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет.*

**Решение:** Заметим, что если если прав Чарльз, то правду сказал не только он, но и Петр, Виктор и Татьяна — всего 4 школьника. Противоречие. Значит, Чарльз солгал, и отсутствует не больше четырёх человек. Пусть права Татьяна. Тогда отсутствует ровно четверо, и при этом она, Пётр и Виктор сказали правду, а три остальных ученика — ложь. Этот вариант годится. Пусть Татьяна тоже сказала неправду, тогда Полина права, а среди Петра, Виктора и Шурика ошибся ровно один. Этим ошибившимся не может быть Пётр: в этом случае Виктор тоже сказал ложь. Остальные варианты годятся: если ошибся Виктор, то Пётр и Шурик правы, и тогда отсутствует 2 человека. Если же ошибся Шурик, то отсутствует ровно трое, и эта ситуация тоже годится.

**Ответ:** 2, 3 или 4 человека.

*Рекомендации по проверке:*

| есть в работе | баллы |
|---|---|
| Доказано, что отсутствовать могло только 2, 3 и 4 человека | 7 баллов |
| Доказано, что могло отсутствовать 2, 3 и 4 человека, но не доказано отсутствие других вариантов | 3 балла |
| Среди всех возможных вариантов доказаны только два | 2 балла |
| Среди всех возможных вариантов доказан только один | 1 балл |
| Неверное решение или его отсутствие | 0 баллов |

**11.2.** *На доске записано* 10 *действительных чисел; сумма любых трёх из них больше семи. Может ли случиться так, что*

*а) сумма любых семи из них меньше шестнадцати;*

*б) сумма любых пяти из них меньше двенадцати?*

*Ответы обоснуйте.*

**Решение:** а) Обозначим числа $a_1$, $a_2$, …, $a_{10}$. Пусть $S$ — их сумма. Тогда

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 > 7, \\ a_2 + a_3 + a_4 > 7, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_9 + a_{10} + a_1 > 7, \\ a_{10} + a_1 + a_2 > 7. \end{cases}$$

Если сложить левые и правые части всех уравнений, то получим, что $3S > 70$, или $S > \frac{70}{3}$. Если предположить, что сумма любых семи чисел меньше 16, то получим аналогичную систему

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \ldots + a_7 < 16, \\ a_2 + a_3 + \ldots + a_8 < 16, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_9 + a_{10} + \ldots + a_5 < 16, \\ a_{10} + a_1 + \ldots + a_6 < 16. \end{cases}$$

откуда, как и в предыдущем случае, следует $7S < 160$, или $S < \frac{160}{7}$. Тогда $\frac{70}{3} < \frac{160}{7}$, что неверно. Противоречие. Ответ на вопрос задачи отрицательный.

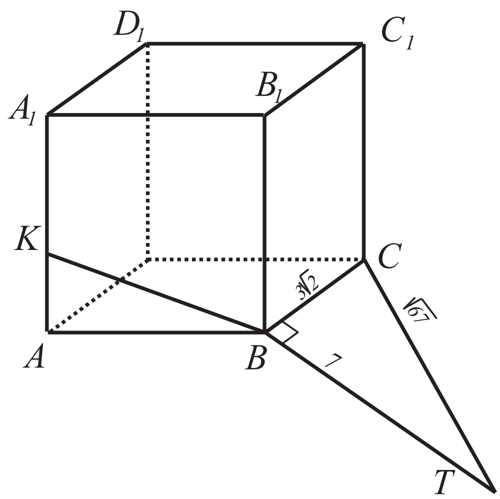
б) Пусть все числа равны $\frac{71}{30}$. Тогда сумма любых трёх из них равна $\frac{71}{10} > 7$, и условие задачи выполнено. При этом сумма любых пяти равна $\frac{71}{6} < 12$. (Пример не единственно возможный.)

**Ответ:** а) нет; б) да.

*Рекомендации по проверке:*

| **есть в работе** | **баллы** |
|---|---|
| Доказана невозможность выполнения пункта а и приведён верный пример чисел, доказывающих возможность выполнения пункта б | 7 баллов |
| Доказана невозможность выполнения пункта а, а верного примера чисел в пункте б нет | 4 балла |
| Приведён верный пример чисел в пункте б, но отсутствует (или неверно) доказательство пункта а | 3 балла |
| Ответы верные, но не обоснованные или обоснованные неверно | 0 баллов |

**11.3.** *На ребре $AA_1$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром длины $3\sqrt{2}$ отмечена точка $K$. В пространстве отмечена такая точка $T$, что $TB = 7$ и $TC = \sqrt{67}$. Какое наименьшее и наибольшее значение может иметь длина отрезка $TK$? Ответ обоснуйте.*




К решению задачи 11.3

**Решение:** Рассмотрим треугольник $TBC$. Так как $TC^2 = 67 = 49 + 18 = TB^2 + BC^2$, этот треугольник — прямоугольный с прямым углом $TBC$. Тогда прямая $BC$ перпендикулярна плоскости $TBA$ по критерию перпендикулярности прямой и плоскости. Это означает, что точка $T$ лежит в плоскости $ABA_1$. При этом расстояние $TB$ фиксировано, то есть точка $T$ лежит на окружности с центром в точке $B$ радиуса 7 (см. рисунок).

Так как $TK \leqslant TB + BK = 7 + BK$, и равенство достигается, когда точка $B$ лежит на отрезке $TK$, наибольшее значение $TK$ достигается при наибольшем $BK$, то есть, когда верно равенство $K = A_1$. В этом случае $BK = 6$, а $TK = 13$. С другой стороны, $TB > BA_1 \geqslant BK$, откуда $TK \geqslant TB - BK = 7 - BK \geqslant 7 - 6 = 1$. При этом равенство достигается опять-таки при $K = A_1$, и точкой $T$ выбранной на продолжении прямой $BA_1$ за точку $A_1$.

**Ответ:** наибольшее значение 13; наименьшее значение 1.

*Рекомендации по проверке:*

| есть в работе | баллы |
|---|---|
| Верные ответы с указанием положений точек, при которых они достигаются | 7 баллов |
| Верные ответы без указания положений точек, при которых они достигаются | 6 баллов |
| Верно указано лишь одно из искомых значений с указанием положения точки, при которых оно достигается | 4 балла |
| Верно указано лишь одно из искомых значений без указания положения точки, при которых оно достигается | 3 балла |
| Ответы не обоснованные (обоснованные неверно) | 0 баллов |

**11.4.** *Для некоторых функций $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ и $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ имеет место тождество*

$$f(x)g(y) = axy + bx + cy + 1,$$

*где $a$, $b$, $c$ — константы, а $x$ и $y$ — любые действительные числа. Докажите, что $a = bc$.*

**Решение:** Подставим в тождество $y = 0$ и получим, что $g(0)f(x) = bx + 1$. Аналогично, подставив $x = 0$, получим, что $f(0)g(y) = cy + 1$. Наконец, подставим

$x = y = 0$ и получим, что $f(0)g(0) = 1$. В частности, $f(0) \neq 0$ и $g(0) \neq 0$. Тогда

$$f(x) = \frac{bx+1}{g(0)}, \qquad g(y) = \frac{cy+1}{f(0)},$$

$$axy + bx + cy + 1 = f(x)g(y) = \frac{(bx+1)(cy+1)}{f(0)g(0)} =$$

$$= (bx+1)(cy+1) = bcxy + bx + cy + 1,$$

откуда $axy = bcxy$. Подставив в последнее равенство $x = y = 1$, получим $a = bc$, что и требуется доказать.

Ещё надо показать, что условие задачи не противоречиво, то есть, что такие функции существуют. Например, подойдёт ситуация $f(x) = g(x) = x + 1$ (при этом $a = b = c = 1$). Конечно, пример не единственный.

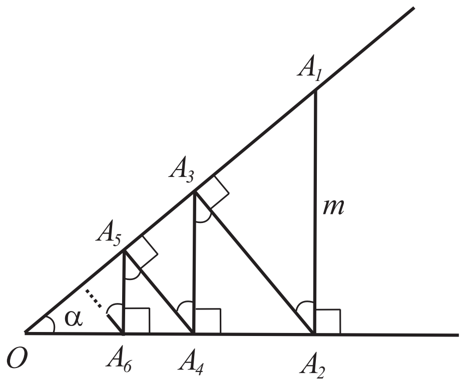
*Рекомендации по проверке:*

| есть в работе | баллы |
|---|---|
| Верное доказательство, подкреплённое примером функций $f$ и $g$ | 7 баллов |
| Доказательство верное, но не обоснована непротиворечивость условия (нет верного примера функций $f$ и $g$) | 6 баллов |
| Доказано, что функции $f$ и $g$ — линейные | 3 балла |
| Утверждение проиллюстрировано верными примерами функций $f$ и $g$ | 1 балл |
| Выкладки и рассуждения, в которых не видно идей доказательства | 0 баллов |

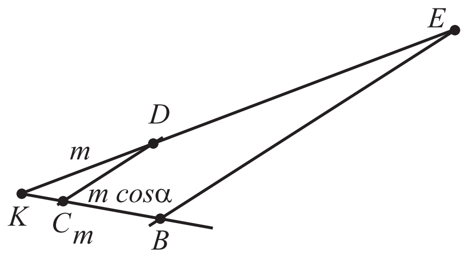
**11.5.** *Дан острый угол $O$. На одной его стороне берём точку $A_1$ и опускаем перпендикуляр $A_1A_2$ на другую сторону угла. Затем из точки $A_2$ опускаем перпендикуляр на $OA_1$, получаем точку $A_3$ и т. д. Как с помощью циркуля и линейки построить отрезок, равный длине бесконечной ломаной $L = A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots$? Приведите построение и обоснуйте, что в его результате получится отрезок требуемой длины.*

**Решение:** Пусть величина угла $O$ равна $\alpha$, а длина отрезка $A_1A_2 = m$ — см. рисунок. Из подобия треугольников $OA_1A_2$ и $A_1A_2A_3$ находим, что $\angle A_1A_2A_3 = \alpha$, а $A_2A_3 = m\cos\alpha$. Далее, из подобия треугольников $OA_2A_3$ и $A_2A_3A_4$ находим, что $\angle A_2A_3A_4 = \alpha$, а $A_3A_4 = m\cos^2\alpha$. Аналогично последовательно получаем (строгое доказательство проводится методом математической индукции):

$$A_4A_5 = m\cos^3\alpha, \quad A_5A_6 = m\cos^4\alpha, \quad \ldots, \quad A_kA_{k+1} = m\cos^{k-1}\alpha, \quad \ldots$$




К решению задачи 11.5, первый этап




К решению задачи 11.5, второй этап

Тогда, используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получаем:

$$L = m + m\cos\alpha + m\cos^2\alpha + \ldots = \frac{m}{1-\cos\alpha},$$

и нам остаётся показать, как по заданному углу $\alpha$ и отрезку длины $m$ построить отрезок длины

$$x = \frac{m}{1-\cos\alpha}.$$

Это можно сделать, например, следующим образом.

Перепишем последнее равенство в виде

$$\frac{x}{m} = \frac{m}{m - m\cos\alpha}.$$

Отрезок длины $m - m\cos\alpha = A_1A_2 - A_2A_3$ легко строится. Теперь берём произвольный угол с вершиной $K$, на одной его стороне выбираем точки $B$ и $C$, а на другой —точку $D$ так, чтобы $KB = KD = m$, $KC = m - m\cos\alpha$. Теперь через точку $B$ проводим прямую, параллельную прямой $CD$, и точку пересечения этой прямой со второй стороной угла обозначаем через $E$ — см. рисунок.

Отрезок $KE$ — искомый, что следует из подобия треугольников $KCD$ и $KBE$.

*Рекомендации по проверке:*

| **есть в работе** | **баллы** |
|---|---|
| Верное построение и верное доказательство факта, что построенный отрезок имеет требуемую длину | 7 баллов |
| Верно найдена длина нужного отрезка, приведено верное построение, но не обосновано, что построенный отрезок имеет требуемую длину | 6 баллов |
| Верно найдена длина нужного отрезка, а его построение отсутствует или неверно | 4 балла |
| Задача сведена к поиску суммы геометрической прогрессии, но из-за арифметической ошибки длина искомого отрезка найдена неверно; построение отсутствует или неверно | 2 балла |
| Неверный ответ; построение отсутствует или неверно | 0 баллов |

**11.6.** *В соревновании, проходящем в виде однокругового турнира, каждая команда играет с каждой ровно один раз. По окончании однокругового турнира по футболу среди 16 команд оказалось, что команда «Джокер» выиграла у всех* *тех команд, которые в итоговой таблице находятся выше «Джокера» (по набранным очкам), но проиграла всем тем, которые находятся ниже. При этом команд, которые набрали столько же очков, что и «Джокер», не нашлось. Какое самое высокое место в турнире мог занять «Джокер»? Ответ обоснуйте. (Известно, что в футболе за победу дают 3 очка, за ничью — 1, за поражение — 0.)*

**Решение:**

Способ 1. Будем называть команды, опередившие команду «Джокер» в турнирной таблице, *сильными*, а команды, отставшие от неё — *слабыми*. Заметим, что место «Джокера» не изменится, если мы все матчи, где встречались сильная команда со слабой переиграем, и отдадим победу сильной команде. Значит, можно считать (мы так и поступим), что все сильные команды выиграли у всех слабых.

Кроме того, будем считать, что все слабые команды сыграли между собой вничью. Это также допустимо, поскольку в этом случае будет наименьшей как общая сумма набранных ими очков, так и количество очков, набранных лучшей из слабых команд.

Предположим, что «Джокер» занял 5-е место (ещё хуже ситуация если его место 4 или выше). Тогда у нас есть 4 сильных команды и 11 слабых. «Джокер» по итогам турнира набрал всего 12 очков, а каждая слабая команда — 3 очка за победу над «Джокером» и 10 за ничьи с другими слабыми, всего 13 очков, что больше 12. Противоречие. 6-е место «Джокер» занять мог: действительно в этом случае он набрал 15 очков, каждая из 5 сильных команд выиграла у 10 слабых, это уже 30 очков, заведомо больше 15, а каждая слабая набрала $3+9=12$ очков, что меньше 15. Итак, самое высокое место, которое мог занять «Джокер» — шестое.

Способ 2. Пусть команда «Джокер» заняла место $n$ $(1 \leqslant n \leqslant 16)$. Тогда она выиграла $n-1$ встречу и набрала $3(n-1)$ очко. Каждая из $16-n$ слабых команд набрала по крайней мере на очко меньше, то есть набрала не больше $3n-4$ очков, в сумме слабые команды набрали не больше, чем $(16-n)(3n-4)$ очков. Но эти команды, во-первых, все выиграли у «Джокера», во-вторых, сыграли между собой

$$\frac{(16-n)(15-n)}{2} \text{ матчей,}$$

в каждом из которых получили в сумме 2 или 3 очка. Таким образом, они в сумме набрали не меньше, чем $3(16-n)+(16-n)(15-n)$ очков. Имеем неравенство

$$(16-n)(3n-4) > 3(16-n)+(16-n)(15-n),$$

откуда $n > 5{,}5 > 5$. Учитывая, что $n$ — число натуральное, получаем, что $n \geqslant 6$. Остаётся показать, что «Джокер» может занять 6-е место. Действительно, пусть «Джокер» одержал 5 побед (и набрал 15 очков), все команды, которых он победил (они будут сильными), выиграли у всех команд, которым он проиграл (они будут слабыми), а все команды, которым он проиграл, матчи между собой завершили вничью. Тогда каждая сильная команда набрала не меньше 30 очков (победила 10 слабых) и стоит в таблице выше «Джокера». Каждая слабая команда набрала 12 очков (три за победу над «Джокером» и 9 за 9 ничьих с другими слабыми командами) и стоит в таблице ниже «Джокера». Все условия задачи выполнены, пример построен.

**Ответ:** 6-е место.

*Рекомендации по проверке:*

| **есть в работе** | **баллы** |
|---|---|
| Верный и обоснованный ответ | 7 баллов |
| Доказано, что «Джокер» не мог занять место, выше шестого,но нет обоснования (или верного примера), что шестое место он мог занять. | 5 баллов |
| Верный пример турнира, в котором «Джокер» занял 6-е место (при неверном доказательстве невозможности занять более высокое место) | 2 балла |
| Получено неравенство между количеством очков команды «Джокер» и количеством очков всех отставших от неё команд. Дальнейших продвижений нет | 2 балла |
| Верный ответ без обоснования, а также неверный ответ, даже если он подкреплён примерами турниров | 0 баллов |