11 класс

11.1. Жюри, составляя варианты районной олимпиады по математике для 7, 8, 9, 10, 11 классов, стремится к тому, чтобы в варианте для каждого класса было ровно 7 задач, из которых ровно 4 не встречаются ни в одном другом варианте. Какое максимальное число задач можно включить в олимпиаду?

Ответ: 27.

Решение. Неповторяющихся задач будет 20, число повторяющихся задач не превосходит $3 \cdot 5/2 < 8$. Приведем пример вариантов, в которых ровно 7 повторяющихся задач: 7 класс: 1, 2, 3; 8 класс: 1, 2, 3; 9 класс: 4, 5, 6; 10 класс: 4, 5, 7; 11 класс: 4, 6, 7.

11.2. Расположите на плоскости шесть точек так, чтобы каждая прямая, проведённая через любые две из них, разбивала плоскость на две полуплоскости, в каждой из которых было расположено разное количество точек.

Решение. Три точки расположим в вершинах произвольного треугольника ABC. Три оставшиеся – на продолжении сторон AB, BC, CA за точки B, C и A соответственно.

11.3. На столе по кругу расположены 10 карточек, у которых одна сторона белая, другая – черная. Изначально все карточки лежат белой стороной наверх. Разрешается за один ход или перевернуть четыре карточки, лежащие подряд, или выбрать пять подряд идущих карточек и перевернуть четыре из них – первую, вторую, четвёртую и пятую. Удастся ли за несколько таких ходов перевернуть все карточки черной стороной вверх?

Ответ: нет.

Решение. Отметим пять карточек через одну. Заметим, что при каждой разрешённой операции переворачиваются ровно две отмеченные карточки. Сначала среди отмеченных фишек было 5 белых (имеется в виду верхний из цветов). При каждой операции количество белых карт либо не меняется, либо изменяется на 2. Итак, среди отмеченных фишек белых карт всегда остаётся нечётное число.

11.4. Решите уравнение:

$$\frac{10}{x+10}+\frac{10\cdot 9}{(x+10)(x+9)}+\frac{10\cdot 9\cdot 8}{(x+10)(x+9)(x+8)}+\dots+$$
$$+\frac{10\cdot 9\dots 2\cdot 1}{(x+10)(x+9)\dots(x+1)}=11.$$

Ответ: $-\frac{1}{11}$.

Решение. Запишем уравнение в следующем виде:

$$\frac{10}{x+10}\left(1+\frac{9}{x+9}\left(1+\frac{8}{x+8}\left(\dots\left(1+\frac{1}{x+1}\right)\dots\right)\right)\right)=11.$$

Преобразуя последовательно выражения во внутренних скобках, будем иметь

$$\frac{10}{x+10}\left(1+\frac{9}{x+9}\left(1+\frac{8}{x+8}\left(\dots\left(1+\frac{1}{x+1}\right)\dots\right)\right)\right)=11,$$

$$\frac{10}{x+10}\left(1+\frac{9}{x+9}\left(1+\frac{8}{x+8}\left(\dots\left(1+\frac{2}{x+2}\cdot\frac{x+2}{x+1}\right)\dots\right)\right)\right)=11,$$

$$\frac{10}{x+10}\left(1+\frac{9}{x+9}\left(1+\frac{8}{x+8}\left(\dots\left(1+\frac{3}{x+3}\cdot\frac{x+3}{x+1}\right)\dots\right)\right)\right)=11,$$

$$\dots$$

$$\frac{10}{x+10}\cdot\frac{x+10}{x+1}=11;$$

$$x=-\frac{1}{11}.$$

11.5. Три ребра тетраэдра, выходящие из одной вершины взаимно перпендикулярны, и имеют длины 3, 4 и 4. Найдите радиусы вписанной и описанной сфер тетраэдра.

Ответ: $R=\frac{\sqrt{41}}{2}, r=\frac{12\left(10-\sqrt{34}\right)}{33}$.

Решение. а) Описанная около тетраэдра сфера определяется 4 точками, не лежащими в одной плоскости – общей точкой трех перпендикулярных ребер и концами этих ребер. Эта сфера будет также и описанной сферой около прямоугольного параллелепипеда, построенного на данных ребрах. А центром сферы, описанной около прямоугольного параллелепипеда, является точка пересечения его диагоналей, которые в точке пересечения делятся пополам. Отсюда радиус описанной сферы $R = \frac{1}{2}\sqrt{3^2 + 4^2 + 4^2} = \frac{\sqrt{41}}{2}$

б) Пусть в тетраэдре $ABCD$ $AB = 3$, $AC = 4$ и $AD = 4$. В любой тетраэдр можно сферу вписать. Если центр O сферы соединить с вершинами тетраэдра, то он разобьётся на 4 тетраэдра с общей вершиной O и основаниями, являющимися гранями исходного тетраэдра $ABCD$. Объем $V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 = 16$ и равен сумме объёмов четырех тетраэдров. Длины высот всех этих тетраэдров равны радиусу r вписанной сферы. Найдем площади оснований этих тетраэдров, т. е. площади граней тетраэдра $ABCD$:

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6, S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6, S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8.$$

По теореме Пифагора:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 5, BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 5, CD = \sqrt{AD^2 + AC^2} = 4\sqrt{2}$$

Треугольник BCD равнобедренный, высота, опущенная на основание равна $\sqrt{5^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2}$=$\sqrt{17}$, а $S_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{17} = 2\sqrt{34}$.

Таким образом, $16 = V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot r \cdot (S_{ABD} + S_{ABC} + S_{ACD} + S_{BCD})$, откуда

$$r = \frac{48}{20+2\sqrt{34}} = \frac{12\left(10-\sqrt{34}\right)}{33}.$$

Комментарии. Найден радиус описанной сферы – 2 балла, вписанной – 5 баллов.