ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

Муниципальный этап. Ответы и решения.

11 класс

11.1. Ответ. $\frac{1}{2021}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2021}\right)>\frac{1}{2022}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2022}\right)$.

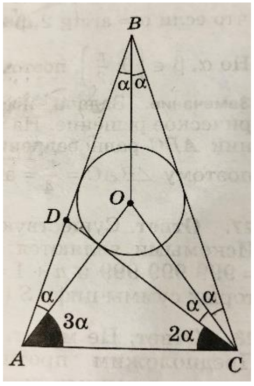
Решение. Обозначим $\frac{1}{2021}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2021}\right)=x$, $\frac{1}{2022}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2022}\right)=y$, $a=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2021}$. Тогда $x=\frac{a}{2021}, y=\frac{1}{2022}\left(a+\frac{1}{2022}\right)$. Поэтому $x-y=\frac{a}{2021}-\frac{a}{2022}-\frac{1}{2022^2}=\frac{a}{2021\cdot2022}-\frac{1}{2022^2}=\frac{1}{2022}\left(\frac{a}{2021}-\frac{1}{2022}\right)>0$, так как $a>1$.

11.2. Ответ. (0;0), (0;3), (3;3), (3;6).

Решение. Рассмотрим уравнение $2x^2-2xy+(y^2-3y)=0$. Его дискриминант равен $4(6y-y^2)$. Он неотрицателен при $0\le y\le 6$. Заметим, что исходное уравнение можно привести к виду $(y-x)^2+x^2=3y$. Поскольку квадраты целых чисел при делении на 3 могут давать только остатки 0 и 1, то числа $y-x$ и x, а значит, и сами числа x и y кратны 3. Поэтому, из соображений делимости, получаем, что x делится на 3 и y делится на 3. Осталось перебрать случаи $y=0, y=3, y=6$. В итоге получаем следующие решения: (0;0), (0;3), (3;3), (3;6).

11.3. Ответ. $\angle A=\angle C=72°, \angle B=36°$.

Решение.



Пусть O – общий центр указанных окружностей. Из условия следует, что BO и CO – биссектрисы углов ABC и BCD (O – центр вписанной окружности) и, кроме того, $AO=BO=CO$ (O – центр описанной окружности). Поэтому если $\angle ABO=\alpha$, то $\angle OAB=\alpha$, $\angle OCB=\angle OBC=\alpha$, $\angle BCD=2\alpha$ (CD – биссектриса). Отсюда $\angle OAC=\angle OCA=3\alpha$. Итак, сумма углов треугольника ABC равна 10α, откуда $\alpha=18°$.

11.4. Ответ. Выигрывает партнер начинающего.

Решение. Разобьем клетки на пары (клеткам, входящим в одну пару, соответствует одна и та же буква).

a	*b*	*c*	*d*
e	*f*	*g*	*h*
a	*b*	*c*	*d*
e	*f*	*g*	*h*

Партнер начинающего выигрывает, если будет каждым ходом закрашивать клетку с той же буквой, которую имеет клетка, закрашенная перед этим начинающим.

11.5. Ответ. Все бегуны получают по 0 баллов.

Решение. Рассмотрим любую пару бегунов. Как в начале, так и в конце пути один и тот же бегун находится впереди другого. Тогда либо вообще ни один из них не обгонял другого, либо каждый (из этих двоих) обогнал другого по одному разу. Значит, на обгонах друг друга (в рассмотренной паре) бегуны заработали по 0 баллов. Таким образом, в итоге все бегуны получат по 0 баллов.

Замечание. Из решения видно, что утверждение останется верным и в случае непостоянства скоростей бегунов, когда количество обгонов в паре может быть сколь угодно большим.