7 класс

7.1. (*7 баллов*)

Найдите значение выражения

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\dots\left(1+\frac{1}{2m}\right)\left(1-\frac{1}{2m+1}\right).$$

Ответ: 1.

Решение: Заметим, что

$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}=1,\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{5}=1,\dots,$

$$\left(1+\frac{1}{2m}\right)\left(1-\frac{1}{2m+1}\right)=\frac{2m+1}{2m}\cdot\frac{2m}{2m+1}=1.$$

Следовательно, значение выражения равно 1.

7.2. (*7 баллов*)

Два пешехода вышли на рассвете. Каждый шёл с постоянной скоростью. Один шёл из A в B, другой – из B в A. Они встретились в полдень и, не прекращая движения, пришли: один – в B в 4 часа вечера, а другой – в A в 9 часов вечера. В каком часу в этот день был рассвет?

Ответ: в 6 часов.

Решение: Пусть от рассвета до полудня прошло x часов. Первый пешеход шёл x часов до полудня и 4 после, второй – x до полудня и 9 после. Заметим, что отношение времён равно отношению длин путей до и после точки встречи, так что $\frac{x}{4}=\frac{9}{x}$. Из этой пропорции находим, что $x = 6$.

Действительно, пусть скорость первого пешехода (идущего из A в B) равна V_1, а скорость второго пешехода (идущего B в A) равна V_2. Тогда до точки встречи первый прошёл $V_1\cdot x$ часов, а второй – $V_2\cdot x$. После полудня первый прошёл $V_1\cdot 4$, а второй – $V_2\cdot 9$. Но после полудня первый прошёл столько же, сколько второй до полудня. И наоборот, после полудня второй прошёл столько же, сколько первый до полудня. Имеем:

$$V_1\cdot x=V_2\cdot 9,\frac{V_1}{V_2}=\frac{9}{x};$$

$$V_1\cdot 4=V_2\cdot x,\frac{V_1}{V_2}=\frac{x}{4}.$$

Отсюда $\frac{x}{4}=\frac{9}{x}$.

7.3. (*7 баллов*)

Докажите, что если в шестизначном числе первая и четвёртая цифры равны, вторая и пятая равны, а также третья и шестая равны, то это число кратно 7, 11 и 13.

Решение:

$$\overline{xyzxyz}=100000x+10000y+1000z+100x+10y+z=$$

$$= 100100x + 10010y + 1001z = 1001(100x + 10y + z).$$

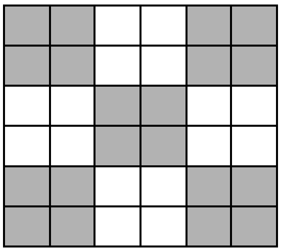
1001=7 · 11· 13.

7.4. (*7 баллов*)

Можно ли раскрасить клетки квадрата размером 6×6 в два цвета так, чтобы клеток одного цвета было больше, чем клеток другого, а в каждом прямоугольнике размером 1×4 было поровну клеток каждого цвета?

Ответ: можно.

Решение: Разобьем, например, квадрат размером 6×6 на девять квадратов размером 2×2, которые раскрасим в шахматном порядке (см. рисунок), тогда условие задачи выполняется.



7.5. (*7 баллов*)

В семье шестеро детей. Пятеро из них старше самого младшего на 2, 6, 8, 12 и 14 лет соответственно. Сколько лет младшему, если возрасты всех детей – простые числа?

Ответ: 5 лет.

Решение. Проверим сначала простые числа, меньшие шести. Очевидно, что искомое число нечётное, число 3 условию не удовлетворяет, так как 3 + 6 = 9 – не простое число. Число 5 удовлетворяет условию, так как 5 + 2 = 7, 5 + 6 = 11, 5 + 8 = 13, 5 + 12 = 17, 5 + 14 = 19, то есть возрасты всех детей действительно простые числа.

Докажем, что этот ответ – единственный. Для этого рассмотрим остатки от деления на 5 всех чисел, прибавляемых к возрасту младшего ребёнка: у числа 2 – остаток 2, у числа 6 – остаток 1, у числа 8 – 3, у числа 12 – 2, у числа 14 – 4. Таким образом, присутствуют все остатки от 1 до 4. Следовательно, если возраст младшего ребенка не кратен пяти, то прибавление к нему числа с остатком, дополняющим его до пяти, даст число кратное пяти и большее пяти, то есть составное.