

Условия и решения задач

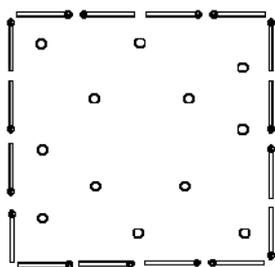
(районная математическая олимпиада 2021 г.)

7 класс

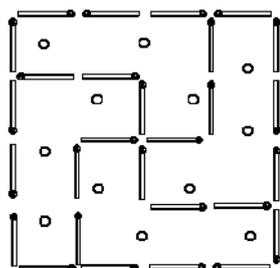
1. Во фляге находится 40 литров молока. Как перелить из неё в 10-литровое ведро 6 л молока с помощью 9-литрового и 5-литрового бидонов?

Решение. Наливаем молоко в 5-литровый бидон и переливаем в ведро. Затем вновь наливаем в 5-литровый бидон, переливаем в 9-литровый бидон, наливаем ещё раз в 5-литровый бидон и отливаем недостающие 4 л в 9-литровый бидон. Тогда в 5-литровом бидоне остаётся ровно 1 л, его и переливаем в ведро.

2. Четыре брата получили от дяди в наследство сад (обнесенный 16-ю спичками), в котором находится 12 плодовых деревьев (монеты или пуговицы), расположенных, как указано на рисунке. Требуется 12-ю спичками разделить сад на 4 равные части одинаковой формы, содержащие по равному числу деревьев.



Ответ показан на рисунке.



3. Найдите все натуральные n такие, что значение выражения $\frac{2n^2 - 2}{n^3 - n}$ является натуральным числом.

Решение. $\frac{2n^2 - 2}{n^3 - n} = \frac{2(n-1)(n+1)}{n(n-1)(n+1)}$. При $n \neq \pm 1$ данное выражение тождественно равно

выражению $\frac{2}{n}$. Так как $n \neq 1$, то значение последнего выражения является натуральным числом только при $n = 2$.

Ответ: $n = 2$.

4. Решите числовой ребус, показанный на рисунке.

$$\begin{array}{r}
 7**0 \quad | \quad ** \\
 - *6* \quad | \quad *4 \\
 \hline
 8 \\
 - 3** \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Решение. «Снесем» 0, получим следующую запись второго вычитания (см. рисунок). Следовательно, вычитается число 380. Оно равно делителю, умноженному на 4, значит, делитель равен $380 : 4 = 95$. Цифра сотен в первом вычитаемом либо 6, либо 7. Посмотрим, при умножении 95 на какие числа получался трехзначное число с цифрой сотен 6 или 7. Таких чисел два: 7 и 8, $95 \cdot 7 = 665$, $95 \cdot 8 = 760$. Следовательно, «подозрительными» делимыми являются числа 7980 и 7030. У чисел $95 \cdot 7$ и $95 \cdot 8$ в разряде десятков стоит 6, что совпадает с цифрой, стоящей в поврежденной записи. Легко проверить, что записи $7980:95$ и $7030:95$ удовлетворяют условию задачи.

Ответ: $7980 : 95$ или $7030 : 95$

$$\begin{array}{r}
 *80 \\
 - 3** \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

5. Докажите, что при $a > 0$ и $b > 0$

$$\frac{a+b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}.$$

Доказательство.

$$\frac{a+b}{1+a+b} = \frac{a}{1+a+b} + \frac{b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}.$$