Всероссийская олимпиада школьников 2021/2022 уч. г.
Муниципальный этап
Математика
7 класс

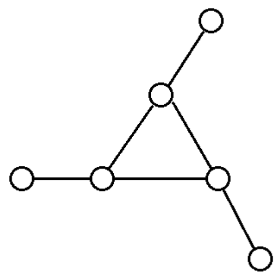
Общее время выполнения работы – 2 часа 55 мин (175 минут).
Максимальная сумма баллов 35.

Во время Олимпиады участники не имеют права общаться друг с другом, свободно перемещаться по аудитории; не вправе пользоваться справочными материалами, средствами связи и электронно-вычислительной техникой. При установлении факта нарушения участником Олимпиады Порядка или использования во время тура запрещенных источников информации решением Оргкомитета такой участник лишается возможности дальнейшего участия в Олимпиаде.

Общие критерии оценки:
7 баллов ставится за полностью решенную задачу.
6-7 баллов ставится, если решение верное, но имеются небольшие недочеты.
5-6 баллов ставится, если решение в целом верное, но имеются существенные ошибки, не влияющие на логику рассуждений.
4 балла ставится, если верно рассмотрен один из двух (более сложный) случай, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3 балла ставится, если получены вспомогательные утверждения, помогающие при решении задачи.
1 балл ставится, если рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0 баллов, ставится, если нет продвижений в решении, <u>даже если при этом дан верный ответ</u>.
Решение школьника не обязано совпадать с предложенными, тогда оно оценивается также в соответствии указанной выше схемой оценок.
При наличии дополнительных критериев решение школьника оценивается в соответствии с ними.

Задание 7.1
Известно, что $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$. Докажите, что $\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}=\frac{1}{ab}$.
Количество баллов 7
Ответ:
Решение
$$\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{a+b}\cdot\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{ab}$$

Задание 7.2
Дано множество чисел:
2021, 3022, 4023, 5024, 6025, 7026
Доказать, что нельзя расставить эти числа в кружках фигуры (см. рисунок справа) так, чтобы суммы по трем линиям и сумма по вершинам треугольника совпадали между собой.



Количество баллов 7
Решение
Предположим, что такая расстановка возможна. Обозначим указанные в условии суммы через S, а сумму всех чисел через P.

Тогда в силу того, что вершины треугольника встречаются в суммах по линиям по два раза, имеем:

$3S - S = P$ (1)

Или

$2S = P$

То есть сумма всех чисел P делится на 2.

С другой стороны, сумма заданных чисел не делится на 2, поскольку среди них три четных и три нечетных числа.

Получили противоречие, поэтому предположение неверно.

Дополнительные критерии

Получили только (1) – 3 балла

Задание 7.3

Кафельная плитка имеет форму прямоугольного треугольника с катетами равными 1 дм и 2 дм. Можно ли из 20 таких плиток сложить квадрат?

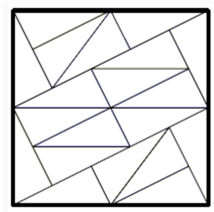
Количество баллов 7

Ответ:

можно

Решение

На рисунке показано, как это можно сделать.



Дополнительные критерии

Любой правильный рисунок – 7 баллов

Задание 7.4

На острове живёт нечётное число людей, причём каждый из них либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Как-то раз все рыцари заявили: – «Я дружу только с 1 лжецом», а все лжецы: – «Я не дружу с рыцарями». Кого на острове больше, рыцарей или лжецов?

Количество баллов 7

Ответ:

Рыцарей больше

Решение

Каждый лжец дружит хотя бы с одним рыцарем. Но так как каждый рыцарь дружит ровно с одним лжецом, у двух лжецов не может быть общего друга-рыцаря. Тогда каждому лжецу можно поставить в соответствие его друга рыцаря, откуда получается, что рыцарей, по крайней мере, столько же, сколько и лжецов. Так как всего жителей на острове нечётное число, то равенство невозможно. Значит, рыцарей больше.

Задание 7.5

Рассмотрим число

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{399}{400}$$

Докажите, что оно больше $^1/_{29}$ и меньше $^1/_{20}$

Количество баллов 7

Решение

Пусть

$$A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{399}{400}$$

$$B = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \ldots \cdot \frac{398}{399}$$

Ясно, что $B > A$ и $AB = {}^{1}/_{400}$.

Поэтому $A^2 < AB = {}^{1}/_{400}$, то есть $A < {}^{1}/_{20}$.

Ясно, что $2A > B$.

Поэтому $A^2 > ½\, AB = {}^{1}/_{800} > ({}^{1}/_{29})^2$, то есть $A > {}^{1}/_{29}$

Дополнительные критерии

Доказано только одно из двух неравенств – 5 баллов