7 КЛАСС

Максимальное количество 35 баллов

Задание 7.1. Как, не имея никаких измерительных средств, отрезать 50 см от нитки, длина которой ⅔ метра? **(7 баллов)**

Решение.

Если от шнурка отрезать четверть (для этого нужно дважды сложить его пополам), останется как раз 50 см. Действительно, $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{2}$.

Комментарий.

1. Приведен верный алгоритм, но не доказано, что он верен – 6 баллов
2. Верный алгоритм с доказательством – 7 баллов.

Задание 7.2. Про натуральные числа m и n известно, что если их сумму умножить на модуль их разности, то получится 2021. Какие значения могут принимать числа m и n? **(7 баллов)**

Решение.

Пусть $m \geq n$, тогда модуль их разности равен (m-n). Так как m и n натуральные числа, то их сумма и модуль разности натуральные числа. Число 2021 делится нацело только на 1, 43, 47 и 2021. Значит, возможно только четыре случая: $\begin{cases} m-n=1 \\ m+n=2021 \end{cases}$; $\begin{cases} m-n=43 \\ m+n=47 \end{cases}$; $\begin{cases} m-n=2021 \\ m+n=1 \end{cases}$; $\begin{cases} m-n=47 \\ m+n=43 \end{cases}$ Третий и четвертый случай можно не рассматривать при наличие утверждения, что сумма натуральных чисел больше модуля их разницы. Решив системы уравнений, получим два ответа: m=1011, n=1010 и m=45, n=2.

Комментарий:

1. Подобран один ответ – 1 балл.
2. Подобрано два ответа – 2 балла.
3. Указаны делители числа 2021 – +1 балл.
4. Найдены оба ответа и доказано, что других ответов быть не может – 7 баллов.
5. За отсутствие допущения $m \geq n$ и/или рассмотрения третьей и четвертой системы уравнений снять 1 балл.

Задание 7.3. Толя изготовил для игры четыре жетона достоинством 1, 2, 3, 5 бокина, которые должны весить 1, 2, 3, 5 граммов соответственно. Но один из этих жетонов он сделал некачественно – с неправильным весом. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирек определить "неправильный" жетон? (**7 баллов)**

Решение.

Сначала положим на одну чашу жетоны в 1 бокин и 2 бокина, а на другую – жетон в 3 бокина; затем на одну чашу положим монеты в 2 бокина и 3 бокина, а на другую – жетон в 5 бокинов.

Если при одном из взвешиваний весы показали равенство, то некачественный жетон – тот, который в этом взвешивании не участвовал. Если при обоих взвешиваниях тяжелее оказалась одна и та же чаша весов, то некачественный жетон – достоинством в 2 бокина, иначе – достоинством в 3 бокина.

Комментарий.

1. Указано, что если при взвешивании весы показали равенство, то некачественный жетон – тот, который во взвешивании не участвовал – 2 балла.
2. Приведены правильные взвешивания, но правильно разобраны только случаи равенства весов – 4 балла.
3. Верный алгоритм с доказательством – 7 баллов.

Задание 7.4. По кругу посажены 17 кустов пионов.

а) Докажите, что обязательно найдутся два соседних куста, общее количество бутонов, на которых чётно.

б) Всегда ли можно найти два соседних куста, общее количество бутонов, на которых кратно 3? **(7 баллов)**

Решение.

а) Первый способ. Предположим, такой пары соседних пионов найти нельзя. Это означает, что кустов с чётным и нечётным числом бутонов чередуются. Но нечётное число (17) кустов чередоваться не может.

Второй способ. Рассмотрим все 17 «соседних» сумм. Их общая сумма вдвое больше числа всех бутонов, то есть чётна. Значит, количество нечётных слагаемых чётно и не может равняться 17.

б) На нечётные места посадим кусты пионов с числом бутонов, дающим остаток 1 при делении на 3, а на чётные – кусты пионов, у которых число бутонов кратно 3. Нетрудно видеть, что ни у каких двух рядом растущих кустов общее количество бутонов не будет кратно 3. **(7 баллов)**

Комментарий.

1. В пункте «а» указано, что если таких кустов не найдётся, то у всех соседних кустов должна быть разная четность числа бутонов. – 1 балл.
2. Полное решение пункта «а» – 4 балла.
3. Приведен пример для пункта «б» – 3 балла.
4. Баллы за пункты «а» и «б» суммируются.

Задание 7.5. Двое пишут, а) 60-значное; б) 14-значное число, употребляя только цифры 1, 2, 3, 4, 5. Первую цифру пишет первый, вторую – второй, третью – первый и т. д. Может ли второй добиться того, чтобы полученное число разделилось на 9, если первый стремится ему помешать? **(7 баллов)**

Решение.

Ответ. а) Может; б) не может.

а) Стратегия второго: писать цифру так, чтобы сумма её с предыдущей цифрой равнялась 6. Поскольку (60/2)*6 делится на 9, то полученное 60-значное число будет делиться на 9.

б) Стратегия первого: сначала нужно написать 1, а потом писать цифру так, чтобы сумма её с предыдущей равнялась 6. В этом случае перед последним ходом второго игрока сумма цифр будет равна 37, и он не сможет добиться своей цели.

Комментарий.

1. В пункте «а» приведена стратегия, но не доказано, что она работает – 2 балла.
2. В пункте «а» приведена стратегия и доказано, что она работает – 3 балла.
3. В пункте «б» приведена стратегия, но не доказано, что она работает – 3 балла.
4. В пункте «б» приведена стратегия и доказано, что она работает – 4 балла.
5. Баллы за пункты «а» и «б» суммируются.