Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

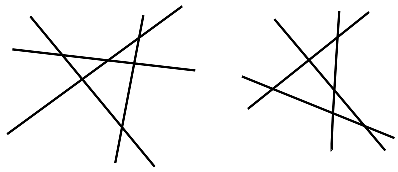
2021-2022 уч.год

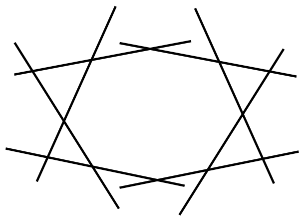
7 класс

Решения и ответы

1. Нарисуйте восемь отрезков так, чтобы каждый отрезок пересекал ровно три отрезка, и никакие три отрезка не пересекались бы в одной точке. Пересечение происходит во внутренних точках, соединенять отрезки в вершинах не разрешается.

   Решение. Существует не меньше двух способов нарисовать отрезки.

   Достаточно привести рисунок.

2. На Новогоднем празднике школьники организовали игру-обмен: если им давали пять мандаринов, то они меняли их на три хлопушки и конфету, а если им давали две хлопушки, то они меняли их три мандарина и конфету. Дед Мороз несколько раз сыграл с ними в эту игру и получил всего 50 конфет. Изначально у него был с собой только мешок с мандаринами, после всех обменов у него не осталось ни одной хлопушки. Сколько мандаринов отдал Дед Мороз детям?

   Решение. Дед Мороз провел 50 обменов, так как ему дали 50 конфет. В конце игры у него не осталось хлопушек, значит, все хлопушки поменял обратно. На каждые два обмена мандаринов на хлопушки (десять отдал - шесть получил) он проводил три обмена хлопушек на мандарины (шесть отдал - девять получил). Поэтому каждые пять обменов Дед Мороз отдавал безвозвратно один мандарин. Все обмены можно разделить на десять таких групп. Поэтому всего Дед Мороз отдал 10 мандаринов.

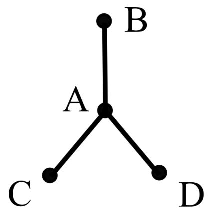
   Ответ. Дед Мороз отдал 10 мандаринов.

3. Про натуральное четное число n известно, что если оно делится на простое число p, то число $n-1$ делится на число $p-1$. Докажите, что n может быть только степенью двойки.

   Решение. Пусть число n делится на нечетное простое число p. Тогда число $p-1$ четно, и это значит, что нечетное число $n-1$ делится на четное число $p-1$. Получили противоречие. Значит, число n не имеет ни одного нечетного делителя, в его разложении на простые множители входит только число 2, т.е. n является степенью двойки.

4. Турист прошел по всем дорожкам парка, пройдя по каждой ровно два раза. Садовник говорит, что дорожки парка нельзя обойти, пройдя по каждой ровно один раз. Может ли существовать такой парк?

Решение. Такой парк существует. Приведем пример. На рисунке показан парк, дорожки которого составляют звезду. Это парк можно обойти, пройдя по дорожкам туда-обратно, начиная с центральной точки A ($A - B - A - C - A - D - A$). Можно также начать обход из любой концевой точки. Этот парк нельзя обойти, пройдя по дорожке ровно один раз. Докажем это. Если начать обход из центра A, то, придя в любую вершину, обратно выйти не получится. Если начать обход из концевой точки, например, из B, то можно дойти через центр до другой концевой точки ($B - A - C$), но попасть в третью точку D без возвращения в центр не получится.



Ответ. Такой парк существует.

5. В кучке 111 камешков. Петя и Вася играют в игру: они по очереди берут из кучки сколько-нибудь камешков, но не больше 9. Пропускать ход не разрешается. Выигрывает тот, кто возьмет последний камешек. Первым ходит Петя. Кто из них выиграет при правильной игре, и как он должен играть?

   Решение. Выиграет Петя. Ему нужно взять один камешек, оставив Васе 110. Далее в ответ на любой ход Васи он должен взять столько камешков, чтобы в кучке перед следующим ходом Васи оставалось число камешков, кратное 10. Это всегда можно сделать, так как Вася берет от 1 до 9 камешков, и поэтому не может уменьшить число камешков на 10, и не может оставить число камешков без изменений. Последним ходом Вася берет какое-то количество камешков из оставшихся 10. Петя забирает все оставшиеся после хода Васи камешки, так как их число находится в интервале от 1 до 9.

   Ответ. Выиграет Петя.

6. Сколько существует шестизначных чисел, в которых четыре подряд идущие цифры образуют число 2021?

   Решение. Рассмотрим три вида шестизначных чисел: $\overline{ab2021}, \overline{a2021b}, \overline{2021ab}$ (черта означает десятичную запись числа, где a, b – цифры).

   В первом случае, $\overline{ab2021}$, a может быть любой цифрой от 1 до 9, b может быть любой цифрой от 0 до 9, эти цифры выбираются независимо. Поэтому получаем всего $9 \cdot 10 = 90$ вариантов.

   Во втором случае, $\overline{a2021b}$, рассуждения повторяются, a может быть любой цифрой от 1 до 9, b может быть любой цифрой от 0 до 9, эти цифры выбираются независимо. Поэтому снова получаем $9 \cdot 10 = 90$ вариантов. Проверяем, что ни один вариант числа из первой группы не совпадает с числом из второй группы. Они, в частности, отличаются цифрой в разряде сотен.

   В третьем случае, $\overline{2021ab}$, цифры a и b выбираются независимо и произвольно от 0 до 9. В этом случае имеем 100 вариантов. Ни один вариант числа из третьей группы не совпадает с предыдущими вариантами, они различаются цифрой в разряде сотен.

   Обще число вариантов $90 + 90 + 100 = 280$.

   Ответ. 280 чисел.

Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

2021-2022 уч.год

7 класс

Критерии проверки

	Балл	За что ставится
Задача 1	7	Полностью верное решение. Приведен верный рисунок. Проверка выполнения условий задачи для верного рисунка не требуется.
	0	Неверное решение.

	Балл	За что ставится
Задача 2	7	Полное решение. Правильно получены группы обменов.
	5	Верное решение. Не указано, как используется условие, что хлопушек после всех обменов не осталось. Вследствие этого разбиение обменов на группы не обосновано.
	3	Описана последовательность обменов. Из рассуждений не следует единственность ответа.
	1	Написано, что проведено 50 обменов. Дальнейшее не написано или неверно.
	0	Неверное решение и (или) неверный ответ.

	Балл	За что ставится
Задача 3	7	Полное решение, получен верный ответ.
	3	Указание на то, что при простом нечетном p число $n-1$ будет нечетным, а $p-1$ – четным. Дальнейшее продвижение отсутствует.
	1	Приводится проверка, что при n, являющемся степенью двойки, условие задачи выполнено. Доказательство утверждения, которое сформулировано в условии, отсутствует.
	0	Неверное решение и (или) неверный ответ.

	Балл	За что ставится
Задача 4	7	Полностью верное решение. Приведен верный пример и написана проверка, что выполнены все условия.
	3	Приведен верный пример, но не показано, что выполнены все условия. Возможно, проведена частичная проверка (например, возможность пройти по всем дорожкам два раза). То, что невозможно пройти по всем дорожкам один раз, не доказано.
	1	Приводится подходящий рисунок, проверка условий не проводится.
	0	Неверное решение и (или) неверный ответ.

	Балл	За что ставится
Задача 5	7	Полностью верное решение. Доказано, что Петя выиграет при правильной стратегии. Показана возможность каждого нужного ему хода.
	4	Описана выигрышная стратегия. Отсутствует доказательство, почему Петя всегда может сделать нужный ему ход.
	1	Приводится описание, какие ходы будут делать Петя и Вася. Не подразумевается, что Вася может выбирать число камешков по своему желанию, а Петя подстраиваться под его выбор.
	0	Неверное решение и (или) неверный ответ.

Задача 6

Балл	За что ставится
7	Полностью верное решение. Верный ответ.
6	Верное решение. Верный ответ. Отличие от 7 баллов – не приводится проверка, что никакие два варианта шестизначного числа не учтены дважды.
5	Верное решение. Неверный ответ, полученный из-за размещения на первой позиции цифры 0.
1	Частично верное решение, в котором допускается только одно размещение пары неизвестных цифр (например, они ставятся только в конце).
0	Неверное решение и (или) неверный ответ, не попадающий под критерии 1 и 5 баллов.