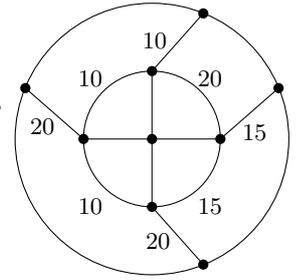


Решения задач 7 класса (1-й вариант).

1. Костя долго гулял по парку: он вышел из центральной точки парка и, пройдя по дорожкам, вернулся в центральную точку (возможно, пройдя по центральной точке несколько раз). На рисунке развилки выделены жирными точками. Приходя на развилку, Костя продолжал движение, не разворачиваясь, — по одной из других дорожек. После прогулки Костя по памяти записал на схеме возле некоторых дорожек, сколько раз он по ним проходил. Не ошибся ли Костя — возможен ли такой маршрут? Не забудьте обосновать свой ответ.



Ответ: нет. По всем дорожкам, ведущим из внутреннего круга на внешний, Костя суммарно проходил $10 + 15 + 20 + 20 = 65$ раз. Однако, он должен был поровну раз перейти с внутреннего круга на внешний, и с внешнего на внутренний, поэтому указанная сумма должна быть четной!

2. Аркадий, Борис и Виктор катались на электросамокатах, не зная про ограничение скорости. Весь путь был разделён на два участка. Аркадий проехал первый участок со скоростью 48 км/ч, а второй — со скоростью 24 км/ч. Борис проехал первый участок со скоростью 24 км/ч, второй — с постоянной скоростью не меньше 48 км/ч. Виктор оба участка проехал с одной и той же скоростью. Стартовали все одновременно и к финишу приехали тоже одновременно. Докажите, что Виктор ехал со скоростью не меньшей, чем 32 км/ч.

Пусть каждый из ребят потратил t часов, а длины участков составляют a и b км. Тогда из условия следует, что $a/48 + b/24 = t$ и $a/24 + b/48 \geq t$. Сложив и разделив на 2, получим $a/32 + b/32 \geq t$. Если скорость Вити будет меньше 32, то потраченное время будет больше, чем $a/32 + b/32$, т.е. больше t . Следовательно, эта скорость не превосходит 32 км/час.

3. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка D , а на стороне BC — точка E . Точка F отмечена так, что отрезки EF и BD пересекаются. Оказалось, что $AB = BC$, $BD = CD = CE = EF$, $AC = BF$. Докажите, что точки C , D , F лежат на одной прямой.

Из $AB = BC$ и $BD = CE$ следует, что $AD = BE$. Следовательно, треугольники BFE и ACD равны по трем сторонам. Поэтому $\angle EBF = \angle DAC = \angle BCA$. При этом $\angle CBD = \angle BCD$ как углы при основании равнобедренного треугольника BCD . Поэтому $\angle FBD = \angle ACD$. Таким образом, треугольники FBD и ACD равны двум сторонам ($FB = AC$, $BD = CD$) и углу между ними. Значит, равны их углы FDB и ADC . Поскольку при этом ADB — одна прямая, то эти углы вертикальны, т.е. CDF — тоже одна прямая.

4. Из клетчатой доски 360×360 вырезали по клеточкам дырку в форме прямоугольника, не выходящего на границы доски. Докажите, что на оставшиеся клетки доски нельзя поставить более 480 не бьющих друг друга ладей (считается, что ладьи не бьют сквозь дырку).

Пусть дырка имеет размеры $a \times b$. Заметим, что все клетки доски с дыркой покрываются $360 - b$ столбцами и $360 - a$ строками. Если $a, b \geq 120$, то все клетки покрываются не более чем 480 линиями, и на них не удастся поставить более 480 ладей. Если же одна из сторон (например, a) меньше 120, то доска покрывается $360 - a$ строками и $2a$ кусочками строк, и на них поместится не более $360 + a \leq 480$ ладей.