Муниципальный этап
Всероссийской олимпиады школьников
по математике
в 2021 – 2022 учебном году

Ответы и решения

Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серъёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

4) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

5) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

6) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказательств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

7) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставляемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а

жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено. Финальная оценка является целым числом от 0 до 7.

8) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2021 – 2022 учебном году
7 класс

Время выполнения заданий — 4 часа

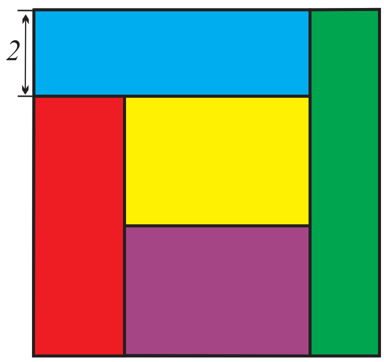
7.1. *На уроке физкультуры все ученики класса построились в шеренгу. Оказалось, что мальчики и девочки в шеренге чередуются. Известно, что ровно 52% учеников — девочки. Найдите количество мальчиков в классе. Ответ обоснуйте.*

Решение: Так как девочек больше половины, то первый и последний ученик в шеренге — девочка. Выведем последнюю девочку из строя — в шеренге останется поровну мальчиков и девочек. При этом в шеренге все мальчики класса — 48%. Девочек там столько же, ещё 48%. Оставшиеся $100 - 2 \cdot 48 = 4\%$ приходятся на выведенную девочку. Значит, один человек составляет 4%, учеников в классе $100 : 4 = 25$, 48 процентов от этого количества — 12 человек.

Ответ: 12 мальчиков.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения имеется арифметическая ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу	6 баллов
Замечено, что девочек на одну больше, чем мальчиков	1 балл
Верный ответ без всякого обоснования	0 баллов

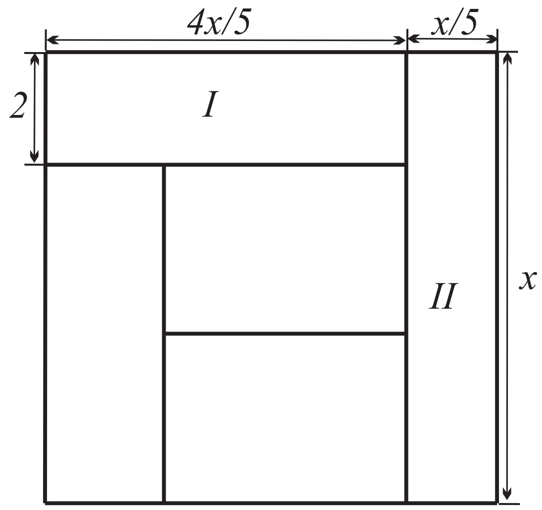


К условию задачи 7.2

7.2. *Квадрат разбит на пять прямоугольников с равными площадями. Сторона одного из прямоугольников (см. рисунок) равна 2. Найдите площадь всего квадрата. Ответ обоснуйте.*

Решение: Обозначим сторону квадрата через x и рассмотрим прямоугольники I и II — см. рисунок на следующей странице. Так как площадь прямоугольника II в пять раз меньше площади квадрата, а одна из его сторон равна стороне квадрата, то вторая сторона прямоугольника в пять раз меньше стороны квадрата, то есть она равняется $\frac{x}{5}$. Тогда большая сторона прямоугольника I равна

$$x - \frac{x}{5} = \frac{4x}{5}.$$



К решению задачи 7.2

Приравнивая друг к другу площади рассматриваемых прямоугольников, получаем уравнение

$$x \cdot \frac{x}{5} = 2 \cdot \frac{4x}{5},$$

откуда $x = 8$.

Ответ: сторона квадрата равна 8.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения имеется арифметическая ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу	6 баллов
Верно составлено уравнение или система уравнений, позволяющих найти площадь квадрата	3 балла
Верно выражены стороны прямоугольников I и II через сторону квадрата	по 1 баллу за каждый прямоугольник
Верный ответ без всякого обоснования	0 баллов

7.3. *Пока Чебурашка ест две порции мороженого, Винни-Пух успевает съесть пять таких же порций, а пока Винни-Пух ест три порции, Карлсон съедает семь. «Работая» вместе, Чебурашка и Карлсон съели* 82 *порции. Сколько порций за это время съел Винни-Пух? Ответ обоснуйте.*

Решение: Предположим, что Винни-Пух съел 15 ровно порций мороженного. Так как $15 = 3 \cdot 5$, Чебурашка съел $3 \cdot 2 = 6$ порций, а Карлсон — $5 \cdot 7 = 35$ порций. Вместе Карлсон и Чебурашка съели $6 + 35 = 41$ порцию, что составляет половину от данных в условии 82 порций. Значит, на самом деле трапеза длилась вдвое дольше предполагаемого, и каждый участник съел вдвое больше мороженного. В частности, Винни-Пух съел $15 \cdot 2 = 30$ порций.

Ответ: 30 порций.

<u>*Рекомендации по проверке:*</u>

есть в работе	**баллы**
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения ответ неверен из-за арифметической ошибки	6 баллов
Верно найдено отношение количеств порций, которые Винни-Пух, Карлсон и Чебурашка съедают за одинаковое время	3 балла
Верный ответ без обоснования или с неверным обоснованием	1 балл

7.4. *Вдоль прямой тропинки с интервалом* 10 *м растут ёлки. На каждую ёлку село по сороке. Сороки могут перелетать с ёлки на ёлку, при этом, если какая-то сорока перелетает с одной ёлки на другую, то какая-то другая сорока обязательно перелетает с какой-то ёлки на другую на столько же метров, но в обратном направлении. Могут ли все сороки собраться на одной ёлке, если*

а) ёлок 7*;* *б) ёлок* 6*?*

Ответ обоснуйте.

Решение: а) Могут. Например, так: сорока с первой слева ёлки летит вправо на 30 м, а сорока с первой справа — влево на те же 30 м. Сорока со второй слева ёлки летит вправо на 20 м, а сорока со второй справа — влево на те же 20 м. Наконец, сорока с третьей слева ёлки летит вправо на 10 м, а сорока с третьей справа — влево на те же 10 м. Все сороки собрались на средней ёлке.

б) Посчитаем сумму расстояний от сорок до самой левой ёлки (назовём её *началом*). Она равна $0+10+20+\ldots+50 = 150$ м. Эта сумма не изменится после перелётов, так как насколько одна сорока удалится от начала, настолько другая к нему приблизится. Если все сороки собрались вместе, то расстояние от каждой из них до начала одно и то же. Сорок всего 6, поэтому это расстояние равно $150 : 6 = 25$ м. Но на таком расстоянии от начала ёлки нет. Значит, собраться на одной ёлке все сороки не могут.

Ответ: а) да; б) нет.

Примечание: Пример перелётов сорок в пункте а), приведённый в решении, не единственно возможный.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Приведена верная последовательность перелётов сорок в пункте а) и доказана невозможность выполнения пункта б)	7 баллов
Доказана невозможность выполнения пункта б), а верной последовательности перелётов в пункте а) нет	4 балла
Приведена верная последовательность перелётов в пункте а), но отсутствует (или неверно) доказательство пункта б)	3 балла
Ответы верные, но не обоснованные или обоснованные неверно	0 баллов

7.5. *Однажды в одном болоте оказалось* 6 *окуней,* 7 *судаков и* 8 *щук. Поскольку никакой пищи в болоте нет, то окуни стали есть судаков, судаки — щук, а щуки — окуней, причём нельзя есть рыбу, которая перед этим съела нечётное количество других рыб. Через некоторое время в болоте осталась ровно одна рыба. Какая? Ответ обоснуйте.*

Решение: Предположим, что осталась щука. Тогда судаками было съедено ровно 7 щук, поэтому какой-то из судаков съел нечётное их количество. Значит, этот судак не мог быть съеден. Противоречие.

Аналогичное противоречие получаем в предположении, что остался окунь: в этом случае щуками было съедено нечётное количество окуней (ровно 5), какая-то из щук съела их нечётное количество и обязана выжить.

Остаётся привести пример, что судак может остаться. Действительно, возможно, что сначала три окуня съели по два судака каждый, потом одна из щук съела всех шестерых окуней, после чего последний судак съел все 8 щук.

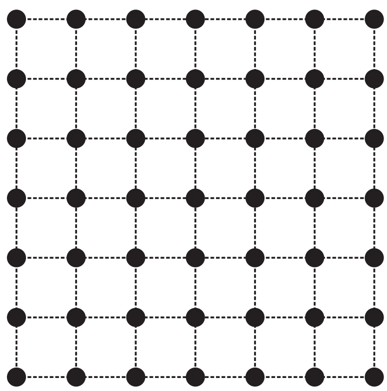
Ответ: остался судак.

Примечание: Пример взаимного поедания рыбами друг друга, приведённый в решении, не единственно возможный.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный ответ и пример последовательности поедания рыбами друг друга с обоснованием того, что никакая рыба помимо судака не могла остаться последней	7 баллов
Доказано, что последней рыбой мог быть только судак, однако отсутствует или приведён неверный пример поедания рыбами друг друга	6 баллов

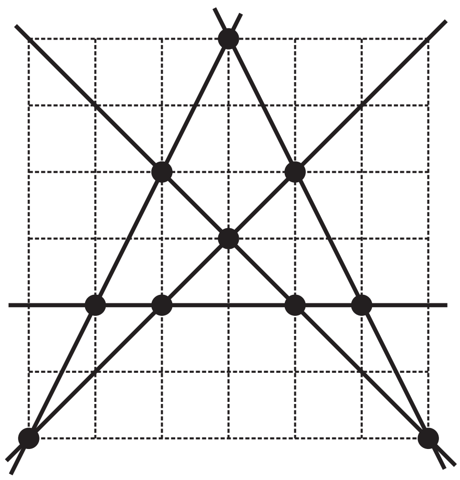
Доказано, что последней рыбой не мог быть окунь	3 балла
Доказано, что последней рыбой не могла быть щука	3 балла
Верный ответ и пример последовательности поедания рыбами друг друга, но с отсутствием доказательства того, что никакая рыба помимо судака не могла остаться последней	1 балл
Верный, но не обоснованный ответ без подтверждающего примера поедания рыбами друг друга	0 баллов



К условию задачи 7.6

7.6. *В квадратном саду росло 49 деревьев (7 рядов по 7 деревьев в каждом — см. рисунок). Садовник дал работнику такое распоряжение: «Оставь только пять рядов деревьев, по четыре дерева в каждом, а остальные выруби». После выполненной работы сад оказался почти опустошённым: вместо 20-и деревьев (как хотел садовник) работник оставил только 10, срубив 39 деревьев. Тем не менее, указание садовника было выполнено. Укажите, как работник ухитрился вырубить 39 деревьев.*

Решение: Например, так, как указано на рисунке.



К решению задачи 7.6

<u>*Рекомендации по проверке:*</u>

есть в работе	**баллы**
Верный пример	7 баллов
Неверные примеры или отсутствие примеров	0 баллов