Условия и решения задач

7 класс

7.1. Можно ли расставить в вершинах квадрата $ABCD$ рациональные числа так, чтобы сумма чисел в вершинах A и B была равна 1, в вершинах B и C была равна 2, в вершинах C и D была равна 3, в вершинах A и D была равна 4?

Ответ: нет.

Решение. Пусть в вершине A расположено число x, тогда в вершине B будет расположено число $1-x$, в C – число $1+x$, в D – число $2-x$. Тогда при любых значениях x суммы чисел на трёх сторонах составят, соответственно, 1, 2, 3. Чтобы сумма чисел на стороне AD была равна 4, надо найти x из условия $x + (2 - x) = 4$. Но такого числа не существует.

7.2. На свой день рождения Никита решил угостить одноклассников и взял с собой в школу 4 пакета с конфетами, каждый из которых содержал одинаковое количество конфет. Он раздал одноклассникам 20 конфет, что составило более 60%, но менее 70% всех имеющихся у него конфет. Сколько всего конфет было у Никиты?

Ответ: 32.

Решение. Предположим, что в каждом пакете было по x конфет. Тогда $\frac{6}{10} < \frac{20}{4x} < \frac{7}{10}$. Следовательно, $\frac{50}{7} < x < \frac{50}{6}$, т.е. $7 < x \leq 8$, $x = 8$. Всего конфет – 32.

7.3. Маша и Саша по очереди (начиная с Маши) записывают 10 цифр на доску слева направо так, чтобы получилось десятизначное число. Причём не допускается запись двух подряд одинаковых цифр. Если получившееся число делится на 9, то побеждает Саша, иначе – Маша. Кто победит при правильной игре с обеих сторон?

Ответ: Саша.

Решение. Число делится на 9, если сумма его цифр делится на 9. Поэтому одна из возможных стратегий для Саши – дополнять на каждом ходу

Машину цифру до 9. То есть, если Маша пишет 0, то Саша пишет 9, если Маша пишет 1, то Саша пишет 8 и т.д. Таким образом, после каждой пары ходов сумма цифр будет увеличиваться на 9. К моменту написания всего числа она станет равной $9 \cdot 5 = 45$.

7.4. В сундуке лежит 2021 монета. Известно, что среди них ровно одна фальшивая. Её масса отличается от массы настоящей, при этом массы всех настоящих монет равны. Можно ли за два взвешивания на чашечных весах без гирь определить, легче или тяжелее фальшивая монета настоящей?

Ответ: да.

Решение. Отложим сначала одну монету в сторону, а остальные разобьем на 2 части по 1010 монет и взвесим их. Если их массы равны, то взвесим отложенную монету с любой другой; если отложенная монета окажется легче, то и фальшивая монета легче остальных, иначе – тяжелее. Если же массы первых двух кучек различны, то разобьем более тяжелую на 2 части по 505 монет и взвесим их. Если весы покажут равенство, то фальшивая монета легче остальных, иначе – тяжелее.

7.5. Дан треугольник ABC с углом А равным 60°. Точки M, N, K лежат на сторонах BC, AC, AB соответственно, причем $BK = KM = MN = NC$. При этом оказалось, что $AN = 2AK$. Докажите, что отрезок MN перпендикулярен AC.

Решение. Пусть P – середина отрезка AN, тогда AP=AK, а угол A=60° (по условию), следовательно треугольник KAP равносторонний. Тогда в равнобедренном треугольнике KNP угол $\angle$KPN=120°, откуда $\angle$PNK= 30°.

Обозначим $\angle$ACB=α, тогда $\angle$ABC=120°-α, откуда $\angle$KMN=180°-$\angle$KMB-$\angle$NMC=60°. Тогда равнобедренный треугольник KMN тоже равносторонний. Следовательно, $\angle$ANM=90°, что и требовалось доказать.