8 класс

8.1. (*7 баллов*)

Сравните 127^{23} и 513^{18}.

Ответ: $513^{18} > 127^{23}$.

Решение: $127^{23} < 128^{23}, 128^{23} = (2^7)^{23} = 2^{161}$.

$2^{161} < 2^{162}, 2^{162} = (2^9)^{18} = 512^{18}$.

$$512^{18} < 513^{18}, 2^{162} < 513^{18}.$$

Используя свойства степени, делаем вывод, что $513^{18} > 127^{23}$.

8.2. (*7 баллов*)

Двенадцать человек несут 12 хлебов. Каждый мужчина несёт по 2 хлеба, каждая женщина – по половине хлеба, а ребёнок по четверти хлеба. Сколько было мужчин, женщин и детей?

Ответ: 5 мужчин, одна женщина и 6 детей.

Решение: Пусть x – число мужчин, y – женщин и z – детей; x, y, z – натуральные числа.

Тогда $x + y + z = 12$ и $2x + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 12$. Из последнего уравнения следует, что $8x + 2y + z = 48$.

Преобразуем последнее уравнение: $7x + y + (x + y + z) = 48$. С учетом первого равенства, получим: $7x + y = 36, x = \frac{36-y}{7}$.

Так как x, y – натуральные числа, то y может принимать значения 1, 8, 15, 22, 29. Значения y, равные 15, 22 и 29, не соответствуют условию задачи $(y < 12)$.

При y = 8: x = 4, z = 0 – это противоречит условию задачи.

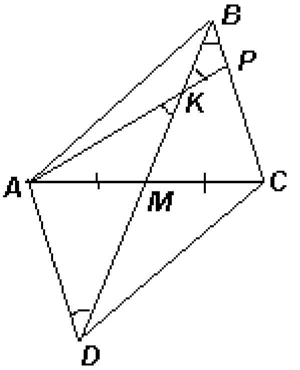
Пусть y = 1, тогда x = 5, z = 6.

8.3. (*7 баллов*)

На медиане *BM* треугольника *ABC* выбрана точка *K* так, что *AK* = *BC*. Луч *AK* пересекает сторону *BC* в точке *P*. Докажите, что треугольник *BKP* – равнобедренный.

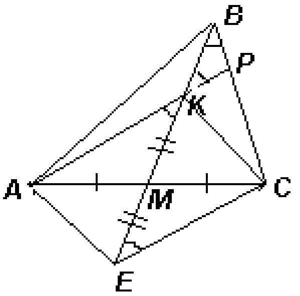
Решение:

Способ 1. Продлим медиану *BM* на её длину: *MD* = *BM*, тогда четырехугольник *ABCD* – параллелограмм (см. рис.).



Так как $AK = BC = AD$, то треугольник DAK – равнобедренный, следовательно, $\angle ADK = \angle AKD$. Так как $\angle PBK = \angle ADK$ и $\angle PKB = \angle AKD$, то в треугольнике BKP $\angle PBK = \angle PKB$, то есть этот треугольник – равнобедренный (с основанием BK).

Способ 2. Продлим отрезок KM на его длину: $ME = KM$, тогда $AKCE$ – параллелограмм (см. рис.).



Следовательно, $CE = AK = CB$, то есть треугольник BCE – равнобедренный. Тогда $\angle PBK = \angle CDB = \angle AKD = \angle BKP$, значит, треугольник BKP – равнобедренный.

8.4. (*7 баллов*)

Назовем автобусный билет с шестизначным номером счастливым, если сумма цифр его номера делится на 7. Могут ли два билета подряд быть счастливыми? Если такие билеты существуют, то приведите примеры номеров таких билетов.

Ответ: например, 429999 и 430000.

Решение: Если два последовательных числа отличаются только последней цифрой, то их суммы чисел отличаются на 1, а стало быть, не могут делиться на 7 одновременно. Еще один случай – когда при добавлении к числу 1 несколько девяток на конце превращаются в нули, а следующая за ними цифра увеличивается на 1 (например, 699 и 700). Сколько нам нужно таких девяток? Если девятка одна, то суммы цифр отличаются на $9 - 1 = 8$, если две, то на $2 \cdot 9 - 1 = 17$, если три, то на $3 \cdot 9 - 1 = 26$, если четыре, то на $4 \cdot 9 - 1 = 35$, если пять, то на $5 \cdot 9 - 1 = 44$ и т.д. Необходимо, чтобы эта разность делилась на 7. Это выполняется, например, при четырех нулях на конце большего из чисел. Осталось придумать для него «начало»: 429999 и 430000.

Комментарий. Верный пример без обоснования – 3 балла.

8.5. (*7 баллов*)

Из клетчатой бумаги по линиям сетки вырезали большой квадрат. Из него также по линиям сетки, вырезали меньший квадрат. После этого от большого квадрата осталось ровно 79 клеток. Обязательно ли вырезанный квадрат содержал одну из угловых клеток большого?

Ответ: да, обязательно.

Решение: Пусть большой квадрат содержал N^2 клеток, а вырезанный квадрат - M^2 клеток, тогда $N^2 - M^2 = 79,$ то есть $(N-M)(N+M) = 79.$

Так как 79 – простое число, то $\begin{cases} N+M=79, \\ N-M=1 \end{cases}$. Решением этой системы является $N = 40,\ M = 39.$ Следовательно, вырезанный квадрат примыкал к двум сторонам большого, то есть содержал одну из его угловых клеток.

Комментарий.

Полное обоснованное решение – 7 баллов.

Приведено верное, в целом, рассуждение, в котором есть мелкие пробелы или неточности – 5 баллов.

Приведён только верный ответ – 1 балл.