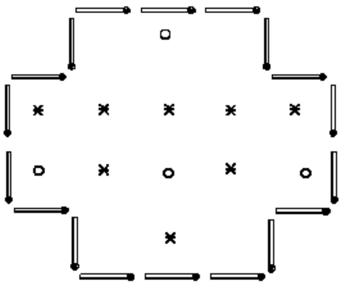
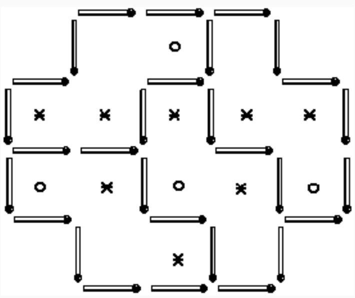
Условия и решения задач
(районная математическая олимпиада 2021 г.)

8 класс

1. Четырем крестьянам необходимо разделить участок (обнесенный 18-ю спичками), в котором находится 4 яблони и 8 кустов смородины (монеты или пуговицы), расположенные так, как показано на рисунке. Требуется разделить 13-ю спичками участок на 4 равные части одинаковой формы, содержащие по одной яблони и по два куста смородины.



Ответ показан на рисунке.

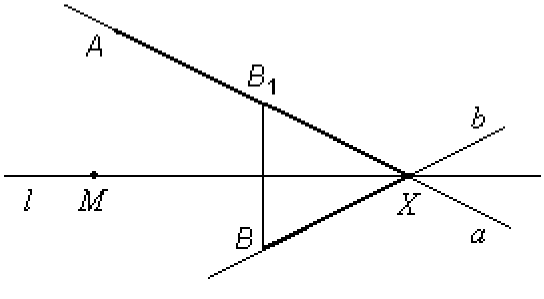


2. Докажите, что n^2+n+1 не делится на 2022 ни при каком целом n.

Доказательство. Заметим, что $n^2 + n + 1 = n(n+1) + 1$. Значит, $n^2 + n + 1$ является нечетным числом при любом n, и поэтому не делится на 2022. Что и требовалось доказать.

3. Даны две точки A и B и прямая l, их разделяющая. Проведите прямые a и b так, чтобы угол между ними делился бы прямой l пополам и $A \in a$, $B \in b$.

Анализ. Предположим, задача решена и точка X – искомая, M – произвольная точка на прямой l (см. рисунок). Тогда $\angle AXM = \angle MXB$. Если построить точку B_1, симметричную B относительно прямой l, то B_1 будет лежать на AX .



Построение. Соединяем точку A с точкой B_1 (симметричной B) и продолжаем AB_1 до пересечения с прямой l в точке X. Прямые AX и BX искомые, так как образуют равные углы с прямой l.
Задача имеет решение, если A и B лежат по разные стороны от прямой l.
Если A и B находятся на равном расстоянии от прямой l и если AB перпендикулярна прямой l, то таких прямых можно провести бесконечное множество, так как лучи, исходящие из любой точки прямой l и проходящие через A и B, образуют равные углы с прямой l.
Задача не имеет решений в следующих случаях: 1) A и B расположены по одну сторону от прямой l (или одна из точек лежит на прямой l); 2) A и B расположены по разные стороны от прямой l на одинаковом от неё расстоянии, но AB не перпендикулярна к прямой l.

4. Докажите, что для любых положительных чисел *m, n, p, q*

$$\frac{(m^2+m+1)(n^2+n+1)(p^2+p+1)(q^2+q+1)}{m\cdot n\cdot p\cdot q}\ge 81.$$

Доказательство. Легко доказать, что при $a>0$ $a+\frac{1}{a}\ge 2$. Воспользуемся этим неравенством, предварительно сократив дробь $\frac{\left(m^2+m+1\right)\cdot\left(n^2+n+1\right)\cdot\left(p^2+p+1\right)\cdot\left(q^2+q+1\right)}{m\cdot n\cdot p\cdot q}$ на $mnpq$.

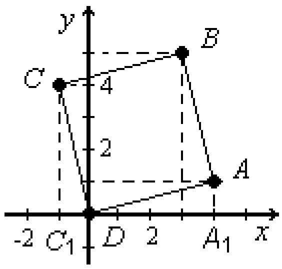
Получим: $\frac{\left(m^2+m+1\right)\cdot\left(n^2+n+1\right)\cdot\left(p^2+p+1\right)\cdot\left(q^2+q+1\right)}{m\cdot n\cdot p\cdot q}=$

$$=\left(m+1+\frac{1}{m}\right)\cdot\left(n+1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(p+1+\frac{1}{p}\right)\cdot\left(q+1+\frac{1}{q}\right)\ge(2+1)\cdot(2+1)\cdot(2+1)\cdot(2+1)>81 .$$

Что и требовалось доказать.

5. Постройте на координатной плоскости точки *A*(4;1), *B*(3;5), *C*(-1;4), *D*(0;0). Докажите, что эти точки являются вершинами квадрата.

Решение. Изобразим данные точки на координатной плоскости (см. рисунок). Пусть A_1 и C_1 – проекции точек A и C на ось Ox.



Используя теорему Пифагора легко показать, что $AB = BC = CD = DA$. Значит, четырехугольник $ABCD$ – ромб. Из равенства прямоугольных треугольников ADA_1 и CDC_1 следует, что $\angle CDC_1 + \angle ADA_1 = 90^\circ$. Следовательно, $\angle CDA = 90^\circ$, а четырехугольник $ABCD$ – квадрат. Что и требовалось доказать.