8 класс

8.1. Обычно мы записываем дату в формате число, месяц и год (например, 17.12.2021). В США же принято записывать последовательно номер месяца, номер дня и год (например, 12.17.2021). Сколько дней в году нельзя определить дату однозначно по её написанию?

Ответ. 132.

Решение. Очевидно, это те дни, у которых дата может быть номером месяца, то есть принимает значения от 1 до 12. Таких дней 12 × 12 = 144. Но те дни, у которых число совпадает с номером месяца, понимаются однозначно. Таких дней 12. Поэтому искомых дней 144 – 12 = 132.

8.2. Какое из чисел больше: 2^{2021} или 5^{864} ?

Ответ. $2^{2021} > 5^{864}$

Решение. Из неравенства $2^7 = 128 > 125 = 5^3$ следует, что $2^{2021} = (2^7)^{288} \cdot 2^5 > (5^3)^{288} = 5^{864}$

8.3. Найти значение выражения $\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab}$, если $a + b + c = 0$.

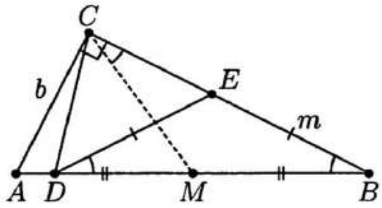
Ответ. 3.

Решение. $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + (a + b + c)(3ab + 3bc + 3ca) - 3abc$. Используя условие $a + b + c = 0$, получаем: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Тогда $\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab} = \frac{a^3+b^3+c^3}{abc} = \frac{3abc}{abc} = 3$

8.4. Меньший катет AC прямоугольного треугольника ABC имеет длину b. На гипотенузе AB выбрана такая точка D, что $BD = BC$. На катете BC взята точка E, что $DE = BE = m$. Найдите периметр четырехугольника $ADEC$.

Ответ. $2m + b$.

Решение. Пусть M - середина гипотенузы AB данного прямоугольного треугольника ABC. Тогда, $AM = BM = CM$ и $\angle BDE = \angle MBC = \angle MCB$ (углы при основании двух равнобедренных треугольников). Так как $BD = BC$, то $\Delta BDE = \Delta BCM$ (по стороне и двум прилежащим углам), следовательно, $CM = DE = m$ и $CE = BC - BE = BD - BM = DM$. Тогда



$P_{ADEC} = AD + DE + EC + CA = AD + m + DM + b = AM + m + b = 2m + b$.

8.5. Двое игроков по очереди выставляют по одной шашке на клетчатую доску размера 51×51. При этом на каждой горизонтали и каждой вертикали должно быть не больше двух шашек. Игрок проигрывает, если не сможет сделать очередной ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ. Выигрывает второй игрок.

Решение. Заметим, что от перестановки горизонталей доски ничего не изменяется. Иными словами, если некоторая позиция является проигрышной для первого, и мы разрежем доску на горизонтали и переставим их, то новая позиция тоже будет проигрышной для первого (а если она была выигрышной для первого, то она останется выигрышной). Это следует из того, что при такой перестановке числа шашек на вертикалях не меняются.

От перестановки вертикалей тоже ничего не меняется.

Пусть первый поставил на доску первую шашку. Переставим горизонтали и вертикали так, чтобы первая шашка оказалась на средней вертикали, но не в центре доски. Далее второй игрок должен делать ходы симметрично ходам первого игрока относительно центра доски. Тогда вторая шашка окажется на средней вертикали, и первый игрок не сможет занять центральную клетку.

Второй игрок всегда сможет сделать симметричный ход. Действительно, после каждого хода второго расстановка шашек симметрична относительно центра доски. Значит, на средней горизонтали стоит либо 0, либо 2 шашки. Если там стоит 0 шашек, то первый может сделать ход на среднюю горизонталь (но не в центр!). Ясно, что второй сможет ответить симметричным ходом.

На среднюю вертикаль первый пойти не может. Осталось рассмотреть случай, когда он ставит шашку в клетку, не лежащую ни на средней горизонтали, ни на средней вертикали. Его ход не изменит количества шашек на горизонтали и вертикали, содержащих симметричную клетку, поэтому второй всегда может поставить туда шашку.

Критерии и методика оценивания выполнения олимпиадных заданий

На олимпиаде должна использоваться 7-балльная шкала: каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником.

Основные принципы оценивания приведены в таблице.

Баллы	*Правильность (ошибочность) решения*
7	Полное верное решение.
6 – 7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5 – 6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
2 – 3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0 – 1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов зато, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи.