Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников
2021– 2022 учебный год
Математика
8 класс

Участникам муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников по математике в 2021 – 2022 учебном году предлагается решить **5 задач**.

Задания составлены с учетом школьной программы по принципу «накопленного итога». Они включают как задачи, связанные с теми разделами школьного курса математики, которые изучаются в текущем году, так и задачи по пройденным ранее разделам. Решения задач помимо знания участниками стандартной школьной программы по математике (алгоритмы, теоремы) предполагают владение навыками построения логических конструкций, доказательства цепочек математических утверждений.

Полное верное решение каждой задачи оценивается в **7 баллов**.

Максимальная сумма баллов за решение пяти задач олимпиады составляет **35 баллов**.

Требования к проверке работ:

1) Олимпиада не является контрольной работой и недопустимо снижение оценок по задачам за неаккуратно записанные решения, исправления в работе. В то же время обязательным является снижение оценок за математические, особенно логические ошибки;

2) Стандартная методика оценивания:

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения.**
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

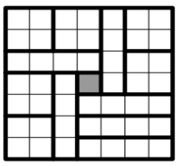
В комментариях к отдельным задачам, в приведенных ответах и решениях к задачам олимпиады, указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Ответы и решения

8.1. Из клетчатого квадрата 7×7 по границам клеток вырезали равное количество квадратов 2 × 2 и прямоугольников 1 × 4. Какое наибольшее количество этих фигурок могло быть вырезано?

Ответ. 12.

Решение. Как квадрат, так и прямоугольник, состоят из 4 клеток. Поэтому количество вырезанных фигур не больше, чем 49/4, то есть не больше 12. Фигур обоих типов поровну, поэтому квадратов 2 × 2 и прямоугольников 1 × 4 не более, чем по 6. На рисунке показано, как можно вырезать из квадрата по 6 квадратов 2 × 2 и прямоугольников 1 × 4.



Комментарий. Доказано только, что фигурок не больше двенадцати — 3 балла.
Приведен только пример размещения 12 фигурок — 6 баллов.

8.2. Найдите значение выражения $a^3+12ab+b^3$, если известно, что $a+b=4$.
Ответ: 64.
Решение. $a^3+12ab+b^3=a^3+b^3+12ab=(a+b)(a^2-ab+b^2)+12ab=4a^2-4ab+4b^2+12ab=4(a+b)^2=64$.

8.3. На острове живут рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Некоторые жители острова заявили, что на острове чётное число рыцарей, а все остальные его жители заявили, что на острове нечётное число лжецов. Может ли на этом острове быть ровно 2021 житель?
Ответ: не может.
Решение. Если число жителей острова нечетно, то либо на нем четное число рыцарей и нечетное число лжецов, либо нечетное число рыцарей и четное число лжецов. В первом случае получается, что все жители острова сказали правду. Но тогда все они – рыцари, а рыцарей в этом случае должно быть четное число. Во втором случае получается, что все они солгали. Но тогда все они – лжецы, а лжецов в этом случае должно быть четное число. Таким образом, оба случая невозможны.

8.4. Точка D лежит на гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC, но не совпадает с ее серединой. Докажите, что среди отрезков AD, BD и CD нет равных.
Первое решение. Достроим прямоугольный треугольник ABC до прямоугольника $ABEC$. Точка O пересечения диагоналей этого прямоугольника – середина гипотенузы треугольника. Поскольку диагонали прямоугольника равны, то получается, что $AO = BO = CO$. Рассматривая теперь равнобедренные треугольники AOB и AOC, заключаем, что $\angle ABC=\angle BAO$ и $\angle ACB=\angle CAO$ (рис. 1).

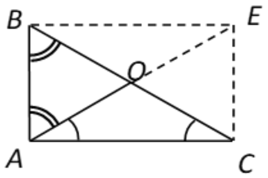


Рис.1

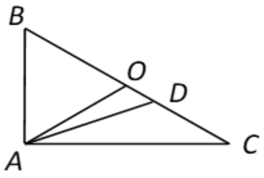
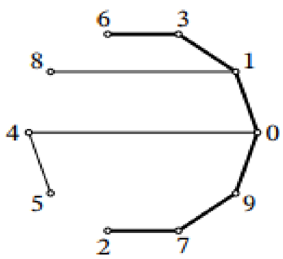


Рис.2

Теперь возьмем на отрезке OC точку D, не совпадающую с O (рис. 2). Отрезки CD и AD – стороны треугольника CAD, лежащие в нем против углов CAD и ACB соответственно. Поскольку против большего угла в треугольнике лежит большая сторона, и $\angle ACB = \angle CAO > \angle CAD$, отрезок CD короче отрезка AD. Аналогично, из треугольника BAD получаем, что отрезок BD длиннее отрезка AD. Таким образом, $BD > AD > CD$, откуда и вытекает утверждение задачи. Случай, когда точка D лежит на отрезке OB, разбирается так же.
Второе решение. Если бы из отрезков AD, BD, CD какие-то два были равны друг другу, то точка D лежала бы на серединном перпендикуляре или к BC, или к AC, или к AB, но все эти серединные перпендикуляры пересекают гипотенузу в ее середине – точке O, отличной от точки D.

8.5. Натуральное число назовём ***интересным***, если все его цифры различны, а сумма любых двух рядом стоящих цифр — квадрат натурального числа. Найдите наибольшее интересное число.
Ответ: 6310972.
Решение. Отметим на плоскости 10 точек, обозначающих цифры от 0 до 9, и соединим те из них, которые в сумме дают квадрат натурального числа.



На такой картинке необходимо найти путь максимальной длины, так как в наибольшем числе должно быть максимальное количество цифр. Несложно заметить, что это путь 2−7−9−0−1−3−6. Чтобы число было наибольшим, первая цифра должна быть как можно больше, т. е. ответом является число 6310972.

Интернет-ресурсы: http://www.problems.ru, https://olimpiada.ru.