Всероссийская олимпиада школьников 2021/2022 уч. г.
Муниципальный этап
Математика
8 класс

Общее время выполнения работы – 2 часа 55 мин (175 минут).
Максимальная сумма баллов 35.

Во время Олимпиады участники не имеют права общаться друг с другом, свободно перемещаться по аудитории; не вправе пользоваться справочными материалами, средствами связи и электронно-вычислительной техникой. При установлении факта нарушения участником Олимпиады Порядка или использования во время тура запрещенных источников информации решением Оргкомитета такой участник лишается возможности дальнейшего участия в Олимпиаде.

Общие критерии оценки:
7 баллов ставится за полностью решенную задачу.
6-7 баллов ставится, если решение верное, но имеются небольшие недочеты.
5-6 баллов ставится, если решение в целом верное, но имеются существенные ошибки, не влияющие на логику рассуждений.
4 балла ставится, если верно рассмотрен один из двух (более сложный) случай, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3 балла ставится, если получены вспомогательные утверждения, помогающие при решении задачи.
1 балл ставится, если рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0 баллов, ставится, если нет продвижений в решении, даже если при этом дан верный ответ.
Решение школьника не обязано совпадать с предложенными, тогда оно оценивается также в соответствии указанной выше схемой оценок.
При наличии дополнительных критериев решение школьника оценивается в соответствии с ними.

Задание 8.1
Известно, что $\frac{2}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{a+2b}$. Докажите, что $\frac{4}{a^2}-\frac{1}{b^2}=\frac{1}{ab}$.
Количество баллов 7
Ответ:
Решение
$$\frac{4}{a^2}-\frac{1}{b^2}=\left(\frac{2}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{a+2b}\cdot\frac{a+2b}{ab}=\frac{1}{ab}$$
Замечание
Возможны решения, в которых из заданного равенства тождественными преобразованиями получается доказываемое равенство.

Задание 8.2
Команда из Пети, Васи и одноместного самоката участвует в гонке. Дистанция разделена на участки одинаковой длины, их количество равно 42, в начале каждого – контрольный пункт. Петя пробегает участок за 9 мин, Вася – за 11 мин, а на самокате любой из них проезжает участок за 3 мин. Стартуют они одновременно, а на финише учитывается время того, кто пришел последним. Ребята договорились, что один проезжает первую часть пути на самокате, остаток бегом, а другой — наоборот (самокат можно оставить на любом

контрольном пункте). Сколько участков Петя должен проехать на самокате, чтобы команда показала наилучшее время?

Количество баллов 7

Ответ:

18

Решение

Если время одного станет меньше времени другого из ребят, то увеличится время другого и, следовательно, время команды. Значит, время ребят должно совпадать.

Обозначив число проезжаемых Петей участков через x и решив уравнение:

$3x + 9(42 - x) = 3(42 - x) + 11x$, получим $x = 18$.

Задание 8.3

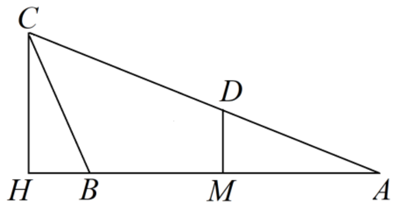
В треугольнике ABC угол B равен 120^0, $AB = 2BC$. Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает AC в точке D. Найдите отношение $CD : DA$.

Количество баллов 7

Ответ:

3 : 2

Решение



Нам нужно отношение отрезков, лежащих на одной прямой. Применяем теорему Фалеса. Угол CAB, одна прямая DM уже есть (и проходит она через нужную нам точку D, это еще одно подтверждение, что здесь целесообразно подстраиваться под теорему Фалеса). Нужна еще одна прямая, параллельная DM и понятно, что она должна проходить через точку C. Проводим прямую CH, параллельную DM. Получаем прямоугольный треугольник CBH с углом 60^0. Тогда второй его угол равен 30^0. Катет, лежащий напротив угла в 30^0 равен половине гипотенузы. Тогда $HM : MA = 3 : 2$. Тогда по теореме Фалеса такое же отношение у отрезков CD и DA.

Задание 8.4

Прямоугольник вымощен плитками размерами 1 × 4 и 2 × 2. Плитки с прямоугольника сняли и одну плитку размером 2 × 2 заменили на плитку размером 1 × 4. Докажите, что теперь новым набором плиток прямоугольник вымостить не удастся.

Количество баллов 7

Решение

Рассмотрим раскраску в 4 цвета, такую, что каждая плитка 2 × 2 содержит ровно одну клетку цвета 1, а каждая плитка 1 × 4 - ни одной или две клетки цвета 1. Следовательно, четность числа плиток 2 × 2 должна совпадать с четностью числа клеток цвета 1, что и доказывает утверждение задачи.

Дополнительные критерии

Предложена только идея раскраски – 3 балла

Задание 8.5

Пусть a, b, c – натуральные числа и $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<1$. Докажите, что тогда $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{41}{42}$.

Количество баллов 7

Решение

Можно считать, что $a \le b \le c$.

Рассмотрим все возможные случаи.

1) $a = 2$. Тогда $b > 2$.

Если $b = 3$, то $c > 6$ и

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}=\frac{41}{42}$$

Если $b = 4$, то $c > 4$ и

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{19}{20}<\frac{41}{42}$$

Если $b > 4$, то

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{9}{10}<\frac{41}{42}$$

2) $a = 3$.

Если $b = 3$, то $c > 3$ и

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{11}{12}<\frac{41}{42}$$

Если $b > 3$, то

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{5}{6}<\frac{41}{42}$$

3) $a > 3$.

Тогда

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}<\frac{41}{42}$$

Тем самым все возможные случаи рассмотрены и утверждение доказано.

Дополнительные критерии

Рассмотрены не все случаи – от 2 до 5 баллов, в зависимости от числа рассмотренных случаев