8 класс

1. Предположим, что справедливы следующие утверждения:

a) среди людей, играющих в шахматы, есть такие, кто не интересуется математикой;

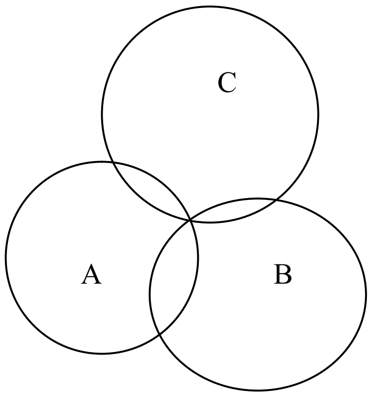
b) люди, каждый день купающиеся в бассейне, но не интересующиеся математикой, не играют в шахматы.

Следует ли из этих утверждений справедливость такого утверждения: не все люди, играющие в шахматы, каждый день купаются в бассейне?

Решение

Утверждение «не все люди, играющие в шахматы, каждый день купаются в бассейне» верно. Решение проиллюстрировано на диаграммах Эйлера-Венна.

Множество А - люди, играющие в шахматы, множество В - люди, не интересующиеся математикой, С - люди, каждый день купающиеся в бассейне.



Критерии оценивания

Верно проведено рассуждение или справедливость утверждения проиллюстрирована на диаграммах Эйлера-Венна - 7 баллов.

2. Можно ли по окружности расставить 100 черных и несколько белых фишек так, чтобы каждой черной фишке соответствовала диаметрально противоположная белая фишка и никакие две белые не стояли рядом?

Решение

Так как каждой черной фишке соответствует диаметрально противоположная белая фишка и никакие две белые не стоят рядом, то фишки должны чередоваться и их поровну. На полуокружности между черной и белой фишкой стоит девяносто девять фишек, поэтому крайние из них одноцветны, следовательно, расстановка невозможна.

Критерии оценивания

В решении указано чередование фишек - 2 балла.

Верно обоснована невозможность обозначенной в задаче расстановки - 7 баллов.

3. Числа 2^{2021} $и$ 5^{2021} выписаны одно за другим. Сколько всего выписано цифр?

Решение

Пусть в числе 2^{2021} имеется k цифр, а в числе 5^{2021} - m цифр, тогда в искомом числе k+m цифр. $10^{k-1} < 2^{2021} < 10^{k}, 10^{m-1} < 5^{2021} < 10^{m},$ следовательно, $10^{k+m-2} < 10^{2021} < 10^{m+k}$ и k+m=2022.

Критерии оценивания

В решении указаны промежуточные оценки, позволяющие выйти на нужную оценку - от 1-3 баллов в зависимости от продвижения в решении.

Получен неверный ответ из-за ошибки в рассуждениях - от 1-4 балла в зависимости от продвижения в решении.

Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки - 5 баллов.

Обоснованно получен верный результат - 7 баллов.

4. Имеется 25 мл 70%го раствора уксусной кислоты и 500 мл 5%го раствора уксусной кислоты. Найдите наибольший объем 9%го раствора уксусной кислоты, который можно получить из имеющихся в наличии растворов (водой доливать нельзя).

Решение

Пусть берем x мл 70%го раствора, а V мл – объем получаемого 9%го раствора. Тогда имеем уравнение

$$0{,}7x + 0{,}05(V - x) = 0{,}09V$$

из которого находим

$$\frac{x}{V} = \frac{4}{65}$$

то есть берем 4 части 70%го раствора и 61 часть 5%го раствора.

Наибольший объем 9%го раствора получится тогда и только тогда, когда хотя бы один из имеющихся растворов взят полностью.

Если взять весь 5%й раствор, то 1/65 получаемого раствора составят 500/61 мл. Тогда 70%го раствора нужно взять $\frac{4*500}{61}$ мл. Это невозможно сделать, так как $\frac{4*500}{61} > 25$. Поэтому берем весь 70%й раствор, и в этом случае 1/65 получаемого раствора составят 25/4 мл. Тогда наибольший объем $\frac{25}{4} \times 65 = \frac{1625}{4} = 406{,}25$ мл.

Критерии оценивания

Неверно составлено уравнение по условию задачи - 0 баллов.

Только верно составлено уравнение по условию задачи - 1 балл.

Верно составлено уравнение по условию задачи. Однако в дальнейшем решении допущена вычислительная ошибка при этом ход решения верный, обоснования правильные - 4 балла.

Верно составлено уравнение по условию задачи. Однако в дальнейших рассуждениях есть ошибка, поэтому ход решения неправильный - 1 балл.

Верно составлено уравнение по условию задачи. Дальнейшее решение верное, но полностью отсутствуют обоснования (есть только вычисления) - 4 балла.

Задача решена правильно, полностью, решение изложено с обоснованиями - 7 баллов.

Если не указано, что для получения наибольшего объема 9%го раствора хотя бы один из имеющихся растворов нужно взять полностью, однако на основе этого соображения осуществляется дальнейшее решение задачи, то баллы не снижаются.

5. Клетчатый лист 5×7 разрезали на квадраты 2×2, трехклеточные уголки и полоски 1×3. Сколько квадратов могло получиться?

Решение

Возьмем за x количество квадратов, за y количество трехклеточных фигур.

Получаем уравнение $4x + 3y = 35$, из которого находим

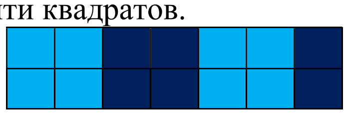
1) x=8, 2) x=5, 3) x=2.

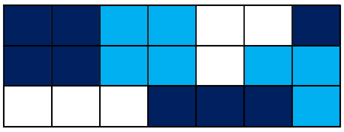
Покажем, что на восемь квадратов разрезать невозможно. Для этого введем раскраску.

Каждый квадрат накрывает ровно одну белую клетку, а белых клеток на доске 6. Значит, больше чем шесть квадратов получить нельзя.

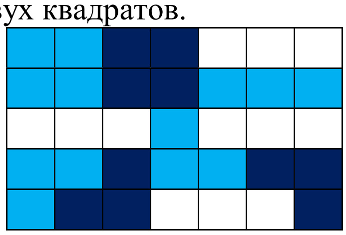
Для пяти и для двух квадратов приведены примеры разрезания.

Для пяти квадратов.





Для двух квадратов.



Критерии оценивания

Только один верный пример разрезания - 1 балл.

Два верных примера разрезания (для разного количества квадратов 2×2) - 2 балла.

Доказано, что на восемь квадратов разрезать нельзя - 2 балла.

Составлено уравнение для нахождения количества квадратов 2×2 и количества трехклеточных фигур - 1 балл.

Это уравнение верно решено - 1 балл.

Баллы суммируются.