8 КЛАСС

Максимальное количество 42 балла

8.1. Три семейных команды грибников собрали 113 грибов. На каждого грибника 1 команды пришлось по 13 грибов, на каждого грибника второй команды пришлось по 5 грибов, на каждого грибника третьей команды пришлось по 4 гриба. Сколько грибников в каждой семейной команде, если их всего 16? **(7 баллов)**

Решения

Пусть x, y и z – количество грибников в 1, 2 и 3 командах соответственно. Составим систему уравнений $\begin{cases} 13x+5y+4z=113 \\ x+y+z=16 \end{cases}$, из которой следует, что y = 49 – x. Так как из условия следует, что 0<y<16, то 0<49–x<16. Этому условию удовлетворяют лишь два натуральных числа: 4 и 5. Однако при x = 4 имеем z = –1, потому x = 5, y = 4, z = 7.

Комментарий

1. Верный ответ без обоснований - 0 баллов
2. Составлена только система уравнений - 1 балл
3. Верный ответ, полученный подбором с приведенным примером - 3 балла
4. Верный алгоритм с доказательством – 7 баллов

8.2. Биатлонистки Арина и Лиза стартуют на одной дистанции. Их стартовые номера – двузначные числа с такой особенностью: если к сумме цифр стартового номера прибавить квадрат разности цифр номера, то получится этот номер. Найти стартовые номера Арины и Лизы. **(7 баллов)**

Решение.

Пусть 10a+b – искомый номер. По условию a+b+$(а-в)^2$ = 10a+b или

$(а-в)^2$ = 9a, откуда следует, что a – полный квадрат.

Перебрав три случая (a=1, a=4 и a=9), получим два решения: 14 и 90.

Комментарий

1. Верный ответ без обоснований - 0 баллов
2. Составлено уравнение - 1 балл
3. Верный ответ, полученный подбором с приведенным примером - 3 балла
4. Верный алгоритм с доказательством – 7 баллов

8.3. Дана произвольная трапеция. Сравните разность ее боковых сторон и разность оснований. Что больше? Ответ обоснуйте. **(7 баллов)**

Решение.

Пусть в трапеции ABCD большее основание – AD, а большая боковая сторона – AB. Проведем отрезок BK||CD. Тогда по неравенству треугольника AB < BK + AK. Учитывая, что AK = AD – BC, а BK = CD, получим AB – CD < AD – BC.

Комментарий

1. Решение не представлено, но выполнено дополнительное построение - 1 балл
2. Верный ответ с доказательством – 7 баллов

8.4. Дана дробь 2/3. Разрешается много раз выполнять следующие операции: прибавлять 2022 к числителю или прибавлять 2021 к знаменателю. Можно ли с помощью только этих операций получить дробь, равную 3/5? **(7 баллов)**

Решение.

Ответ: Нельзя.

Допустим, нашлись такие целые неотрицательные a и b, что $(2+2022a)/(3+2021b) = 3/5$. Тогда после сокращения числитель должен стать тройкой. Но это невозможно, потому что $2+2022a$ не делится на 3, так как 2022 делится на 3, а 2 — нет.

Комментарий

1. Верный ответ без обоснований - 0 баллов
2. Рассмотрена невозможность делимости числителя на 3, но задача не доведена до конца - 3балла
3. Верный алгоритм с доказательством – 7 баллов

8.5. На городском празднике Сказочного курорта использовались белые, зеленые и красные шары. Скучающий школьник решил определить, какой процент составили шары каждого цвета от общего числа шаров. После подсчета результатов оказалось, что три группы шаров набрали в сумме 146%. Школьник нашел свою ошибку, оказывается, по ошибке он подсчитал процент белых шаров не от общего числа всех шаров, а лишь от числа зеленых и белых (остальные проценты он подсчитал правильно). Известно, что зеленых шаров больше 1 000 штук. Докажите, что белых шаров больше 850 штук. **(7 баллов)**

Решение.

Пусть зеленых шаров a штук, белых — ka штук, красных — b штук. По условию $ka/(a+ka)+(a+b)/(a+ka+b) = 1{,}46$ $ka/(a+ka) > 0{,}46$

$k > 0{,}46(1+k)$ $k > 46/54 > 0{,}85$. Так как зеленых шаров больше 1000 штук, то белых шаров $ka > 1000k > 1000\cdot 0{,}85 = 850$ штук, что и требовалось доказать.

Комментарий

1. Верный ответ без обоснований - 0 баллов
2. Решение не представлено в полном объеме, но получена оценка на k - 5баллов
3. Верный ответ с доказательством – 7 баллов

8.6. Можно ли числа 0, 1, 2, 3. 4, 5, 6, 7, 8 и 9 расставить по кругу так, чтобы разность между любыми двумя соседними числами составляла 3, 4 или 5?

Решение.

Ответ: Нельзя.

Допустим, что указанная расстановка возможна. Тогда никакие из чисел 0, 1, 2, 8 и 9 не должны стоять рядом. Так как всего имеется 10 чисел, то перечисленные пять чисел должны чередоваться с числами 3, 4, 5, 6 и 7. То есть два числа из первой пятерки будут соседями числа 7. Но по условию задачи число 7 не должно стоять рядом с числами 0, 1, 8 и 9. Получили противоречие. **(7 баллов)**

Комментарий

1. Верный ответ без обоснований - 0 баллов
2. Верный ответ с доказательством – 7 баллов