Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

2021-2022 уч.год

8 класс

Решения и ответы

1. Существуют ли четыре различных натуральных числа a, b, c, d таких, что числа $a^2 + 2cd + b^2$ и $c^2 + 2ab + d^2$ являются квадратами натуральных чисел?

   Решение. Мы хотим получить два квадрата суммы. Для того, чтобы воспользоваться формулой сокращенного умножения, достаточно сделать так, чтобы $ab = cd$. Можно подобрать любую четверку чисел, например, $ab = 2 \cdot 12 = 24 = 3 \cdot 8 = cd$.

   Равенство $2^2+2\cdot3\cdot8+12^2 = 3^2+2\cdot2\cdot12+8^2$, оно же $2^2+2\cdot2\cdot12+12^2 = 3^2+2\cdot3\cdot8+8^2$, удовлетворяет условию задачи.

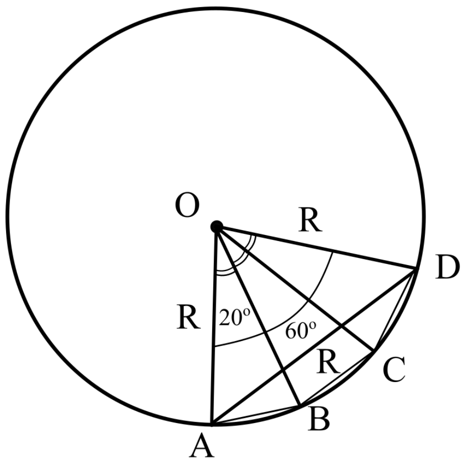
   Ответ. Да, такие числа существуют, можно привести пример.

2. Имеется десятизначное число, для записи которого использованы все десять цифр, при этом ноль не стоит на первом месте. Цифры этого числа переписали в обратном порядке и полученную последовательность приписали справа к первоначальному числу. Докажите, что получившееся двадцатизначное число делится на 99.

   Решение. Сумма всех цифр первого десятизначного числа равна 45, сумма всех цифр полученного числа равна 90. Значит, оно делится на 9. Каждая цифра первого десятизначного числа при переписывании числа в обратном порядке изменит номер своего расположения на новый номер другой четности – первая станет двадцатой, вторая – девятнадцатой, третья - восемнадцатой и т.д. Поэтому сумма цифр, стоящих на четных местах полученного двадцатизначного числа равна сумме цифр, стоящих на нечетных местах. Значит, это число делится на 11, т.е. делится на 99.

3. Дана окружность с центром в точке O и радиусом R. На окружности отметили две точки A и B так, что $\angle AOB = 20°$. Докажите, что $AB > \dfrac{1}{3}R$.

   Решение.



   Построим еще два угла, равных $20°$ – $\angle BOC$ и $\angle COD$. Получили $\angle AOD = 60°$, треугольник AOD – равносторонний, $AD = R$. Также $AB = BC = CD$. AD – кратчайшее расстояние между точками A и D, поэтому $R = AD < 3AB$ (Ломаная длиннее, чем отрезок, соединяющий ее концы.)

4. Однажды команда Рыцарей и команда Лжецов встретились в парке и решили покататься на круговой карусели, вмещающей 40 человек (*Карусель "Цепочка", на которой все сидят друг за другом*). Когда они расселись, каждый увидел двоих, одного впереди себя, другого за собой, и сказал: "Хотя бы один из сидящих впереди меня или сзади меня принадлежит к моей команде". Одно место оказалось свободным, и они позвали еще одного Лжеца. Этот Лжец сказал: "Вместе со мной мы можем расположиться на карусели так, чтобы это правило снова было выполнено". Из скольки человек состояла команда Рыцарей? (*Рыцарь всегда говорит правду, Лжец всегда говорит неправду.*)

   Решение. Рассмотрим первоначальную рассадку. Из высказывания каждого Лжеца следует, что ни один из сидящих впереди и сзади него не является Лжецом, т.е. каждый Лжец окружен двумя Рыцарями. Чередоваться Лжецы и Рыцари не могут, так как впереди или сзади каждого Рыцаря должен быть хотя бы один Рыцарь. Поэтому Лжецы и Рыцари в рассадке образуют последовательности ...РРЛРРЛР... Между двумя рыцарями, соседи которых - Лжецы, в первоначальной рассадке можно добавить любое количество Рыцарей, например ...РРЛРРРРРЛР... Поэтому минимальное количество Рыцарей будет только в случае, если выполнена рассадка по тройкам ...РРЛРРЛР... Первоначально занято 39 мест, это число делится на 3, поэтому максимальное число Лжецов – 13, минимальное число Рыцарей – 26. Обратим внимание на то, что если заменить одного Лжеца на Рыцаря, то получим 12 Лжецов, для образования троек необходимо 24 Рыцаря, и еще 3 Рыцаря можно расположить произвольно между другими Рыцарями.

   В условии задачи говорится, что рассадка при появлении еще одного Лжеца проводится заново. Посмотрим, как можно рассадить 40 человек вместе с дополнительным Лжецом. Из его высказывания следует, что рассадить их так, чтобы хотя бы один из сидящих впереди или сзади каждого принадлежал к его же команде, невозможно. Если бы у нас была лишняя тройка Рыцарей, которую мы при первой рассадке разместили свободно, то тогда дополнительный Лжец вместе с двумя из них мог бы образовать тройку ..РРЛ.. Поэтому при первоначальной рассадке больше, чем 26 Рыцарей быть не могло.

   Ответ. Команда Рыцарей состяла из 26 человек.

5. Имеется 12 положительных вещественных чисел. Известно, что отношение любых двух чисел из этого набора не превосходит числа 2. Докажите, что их можно разбить на шесть пар так, что если вычислить суммы чисел в каждой паре, то отношение любых двух из полученных шести сумм не будет превосходить $\frac{3}{2}$.

   Решение. Расположим числа в порядке неубывания
   $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_6 \le x_7 \le \ldots \le x_{11} \le x_{12}$. Обозначим для удобства доказательств числа $x_1 = a, x_6 = b, x_7 = c, x_{12} = d$.

   По условию, $\frac{d}{b} \le 2$, т.е. $d \le 2b$. Аналогично $\frac{b}{a} \le 2$, т.е. $b \le 2a$.

   Построим пары (a, d) и (b, c). Получим суммы $a+d$ и $b+c$. Докажем для них требуемое соотношение. Покажем, что $\frac{a+d}{b+c} \le \frac{3}{2}$.

$$\begin{cases} a \le b \\ d \le 2b \end{cases} \Rightarrow a + d \le b + 2b \Leftrightarrow a + d \le 3b$$

$$3b = \frac{3}{2}b + \frac{3}{2}b \le \frac{3}{2}b + \frac{3}{2}c$$

$$a+d \leq 3b \leq \frac{3}{2}(b+c)$$

Это равенство и требовалось доказать.

Далее мы должны показать, что $\dfrac{b+c}{a+d} \leq \dfrac{3}{2}$.

$$\begin{cases} b \leq 2a \\ c \leq d \end{cases} \Rightarrow b+c \leq 2a+d$$

$$2a+d = \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}a + d \leq \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}d + d = \frac{3}{2}a + \frac{3}{2}d$$

$$b+c \leq 2a+d \leq \frac{3}{2}(a+d)$$

Разделим все 12 чисел на пары: в каждую пару объединим два числа, находящихся на одинаковом расстоянии от середины. К этим парам можно применить оценку отношений сумм, проделанную выше.

Получаем суммы $(x_1+x_{12}), (x_2+x_{11}), (x_3+x_{10}), (x_4+x_9), (x_5+x_8), (x_6+x_7)$, удовлетворяющие условию.

Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

2021-2022 уч.год

8 класс

Критерии проверки

Задача 1

Балл	За что ставится
7	Полное решение, приводится правильный численный пример.
0	Неверное решение и (или) неверный пример и(или) неверный ответ.

Задача 2

Балл	За что ставится
7	Полное решение. Приведено доказательство делимости на 9 и на 11.
4	Приведено доказательство делимости на 11, отсутствует доказательство делимости на 9.
3	Приведено доказательство делимости на 9, отсутствует доказательство делимости на 11.
1	Вычислена сумма цифр и(или) замечено, что после перестановки меняется четность номера места каждой цифры. Дальнейшее продвижение отсутствует.
0	Неверное решение.

Задача 3

Балл	За что ставится
7	Полностью верное решение. Правильное доказательство.
4	Верное решение, содержащее логические пропуски в обосновании.
0	Неверное решение.

Задача 4

Балл	За что ставится
7	Правильный ответ. Полностью верное решение.
5	Верное решение, содержащее незначительные логические пропуски в доказательствах.
3	Доказано, что Рыцарей не меньше 26. Дальнейшее продвижение отсутствует или неверно.
1	Показано, что Рыцари и Лжецы должны образовать последовательности ...РРЛ... Дальнейшее продвижение отсутствует или неверно.
0	Неверное решение и (или) неверный ответ, кроме решений, попадающих под критерий 3 балла. В частности, не учтено, что с приходом еще одного Лжеца рассадка проводится заново.

Задача 5

Балл	За что ставится
7	Полностью верное решение.
6	Верное решение. Отличие от 7 баллов – все доказательства проводятся для одной пары сумм. Не указано, что аналогичные доказательства нужно применить к другим парам сумм.
5	Верное решение. Приводится разбиение всех чисел на пары и оценка отношений сумм. Для одной пары сумм доказано выполнение неравенства $\frac{a+d}{c+b} \leq \frac{3}{2}$, не доказано выполнение неравенства $\frac{c+b}{a+d} \leq \frac{3}{2}$
3	Частично верное решение. При проведении одного из доказательств нарушены правила действий с неравенствами.
0	Неверное решение.