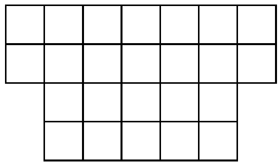
**ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2021/22 гг.**
**МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП**
**МАТЕМАТИКА**
**8 КЛАСС**

**Задания для обучающихся**

**Время выполнения – 235 минут**
**Максимальное количество баллов - 42**

*Написать только ответ — мало!*
*Все ответы нужно объяснить с помощью рассуждений или вычислений!*

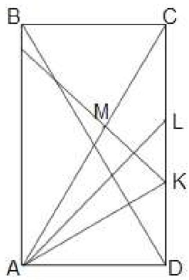


**1.** Разрежьте фигуру справа по линиям сетки на 6 равных частей. Равными называются части, которые можно совместить, наложив друг на друга. При этом части можно поворачивать и переворачивать.

**2.** Петя написал на доске трёхзначное число. Его одноклассник Ваня нашел сумму его цифр и заметил, что она в 25 раз меньше Петиного числа. Затем Петя стер одну цифру в своем числе. Ваня сразу сообразил, что сумма цифр нового двузначного числа в 2,5 раза меньше этого числа. Найдите все трёхзначные числа, которые мог записать Петя.

**3.** Прямая $y = kx + 3$ пересекает прямую $y = x$ и образует вместе с ней и осью ординат треугольник площадью 9. Найти $k$.

**4.** 16 рыцарей и лжецов выстроились один за другим в колонну по одному человеку. Первый и последний оказались лжецами, а каждый из остальных сказал: «впереди меня лжецов стоит в два раза больше, чем позади». Про кого из этих 16 человек можно точно сказать, что он рыцарь? Найдите все варианты. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут.

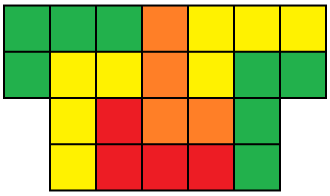



**5.** В прямоугольнике ABCD AL – биссектриса, $AK \perp BD$, $KM \perp AL$. Доказать, что AK=AM.

**6.** Компания «Земля-Космос» написала в отчёте о проделанной работе, что жителям Земли на новый год был сделан подарок – вокруг Луны была пущена «гирлянда» из 2021 спутников зеленого, красного и желтого цветов, причем было не менее 3 спутников каждого цвета. Между любыми двумя соседними желтыми спутниками всегда был хотя бы один красный, между любыми двумя соседними красными – хотя бы один зелёный, а между любыми двумя соседними зелёными – хотя бы один желтый. Возможно ли это?

## РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ

**1. Решение:**



**Критерии проверки:** Любой верный пример – **7 баллов**. В остальных случаях – **0 баллов.**

**2. Ответ:** 150.

**Решение:** Пусть исходное трехзначное число $\overline{abc}$, $a \neq 0$, *a, b, c* – цифры $(a+b+c)\cdot 25 = 100a + 10b + c \Rightarrow 75a - 15b = 24c \Rightarrow 25a - 5b = 8c$. Левая часть делится на 5, следовательно, c=0 или c=5.

Пусть c=0, $5a = b \Rightarrow a = 1, b = 5$, получаем число 150. Если в числе 150 зачеркнуть 0, оставшееся число 15 удовлетворяет условиям: $15 = 6\cdot 2{,}5$

Пусть c=5, $5a - b = 8 \Rightarrow (b+8)\vdots 5 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b = 2 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow 225 \\ b = 7 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow 375 \end{array}\right.$

Вычеркивая поочередно цифры из чисел 225 и 375, убеждаемся, что оставшиеся двузначные числа не удовлетворяют условию.

**Критерии проверки:** Верный ответ с полным обоснованием - **7 баллов**. Обосновано, что кроме 150, 225 и 375, других вариантов нет – **4 балла**, и за верное рассмотрение каждого из вариантов – **по 1 баллу**. Только верно построена модель (уравнение на *a,b,c*) – **2 балла**. Рассмотрено только число 150 с проверкой того, что оно подходит под условие – **1 балл**. В остальных случаях – **0 баллов**.

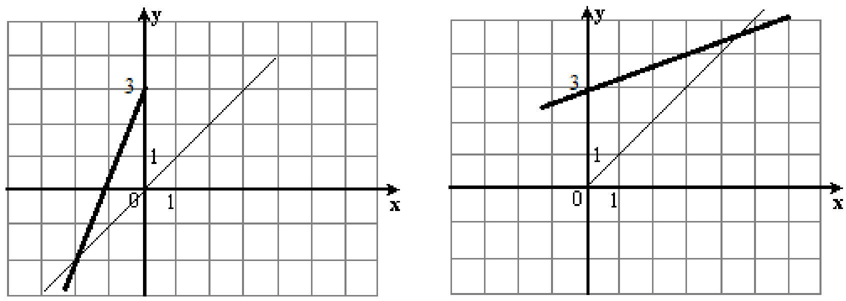
**3. Ответ:** 1/2, 3/2.

**Решение.** Прямая $y = kx + 3$ пересекает ось ординат в точке (0,3). Необходимо найти абсциссу точек пересечения прямых, модуль которой и будет высотой треугольника.

$\begin{cases} y = x \\ y = kx + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{1-k} \\ k \neq 1 \end{cases}$, $k \neq 1$, т.к. иначе прямые были бы параллельны.

Так как прямая $y = x$ расположена в 1 и 3 координатных четвертях, рассмотрим два случая.

$$\left[\begin{array}{l} x>0 \Rightarrow \begin{cases} S=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{1-k}\cdot 3=9 \\ k<1 \end{cases} \\ x<0 \Rightarrow \begin{cases} S=\dfrac{1}{2}\cdot\left|\dfrac{3}{1-k}\right|\cdot 3=9 \\ k>1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k=\dfrac{1}{2} \\ k=\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$




**Комментарий**: Отметим идею другого способа решения. Заметим, что в самом начале, пользуясь тем, что площадь равна 9 и основание треугольника равно 3, находится высота 6. Это приводит также к двум случаям: вершина, из которой проводится высота, находится правее оси *Oy* или левее.
**Критерии проверки:** Верный ответ с полным обоснованием – **7 баллов** (чертеж делать не обязательно). Верно рассмотрен только один случай – **3 балла**. В остальных случаях – **0 баллов**.

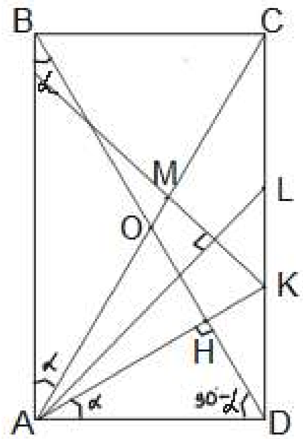
**4. Ответ**: на 11 месте с начала (или на 6 месте с конца) всегда стоит рыцарь.
**Решение:**

- Заметим, что хотя бы 1 рыцарь точно есть. Поскольку в противном случае один из лжецов (а именно, стоящий на 11 месте) произнес бы правду.
- Второй человек не может быть рыцарем, так как перед вторым один лжец, но число лжецов, стоявших впереди рыцаря должно быть четным.
- Если рыцарь стоит на 3 месте ЛЛР….., то после него должен быть ровно 1 лжец, и он очевидно стоит на последнем месте, остальные рыцари.
- Рыцарь, который встречается впервые, не может стоять на четных местах. Если рыцарь стоит на 5, 7, 9 или 11 (до этого лжецы), то после него должно быть соответственно 2, 3, 4, 5 лжецов, все они стоят на последних местах, так как иначе для любого следующего рыцаря число лжецов увеличится, а слева уменьшится, пропорция нарушится.

- Для данных результатов ни один лжец не может сказать правды, так как число лжецов всегда делится на 3, а если рассмотреть какого-либо лжеца, то впереди или позади него будет уже число, не делящееся на 3. Значит, добиться условия, что впереди лжецов в два раза больше, не получится.
- В итоге возможны 5 вариантов расстановки рыцарей: с 3 по 15 места, с 5 по 14, с 7 по 13, с 9 по 12, либо только 11-е место. Все остальные люди – это лжецы. Поэтому точно можно утверждать только про человека, стоящего на 11 месте.

**Критерии проверки:** Верный ответ с полным обоснованием – **7 баллов**. Доказано, что на 11 месте точно рыцарь – **3 балла**. В остальных случаях – **0 баллов**.

**5. Решение.**
Диагонали прямоугольника равны и точкой пересечения делятся пополам. $\angle OBA = \angle OAB = \angle HAD = \alpha$. AL – биссектриса, следовательно $\angle MAL = \angle KAL$. AL содержит высоту и биссектрису треугольника AMK, ΔAMK – равнобедренный, значит AK=AM.




**Критерии проверки:** Верный ответ с полным обоснованием – **7 баллов**. В остальных случаях – **0 баллов**.

**6. Ответ.** Нет
**Решение.** Предположим, что возможно. Пусть желтых спутников – $x$, красных — $y$, а зелёных — $z$. Каждая пара соседних одноцветных спутников однозначно определяет дугу на «окружности». Тогда желтые спутники делят окружность на $x$ частей, причём, по условию, в каждой части должен быть красный спутник, поэтому $y \geq x$. Аналогично получаем, что $z \geq y$ и $x \geq z$. Таким образом, должно выполняться $x \geq z \geq y \geq x$.
Это возможно лишь при условии $x=y=z$, то есть 2021=3$x$. Но 2021 не делится на 3, противоречие.

**Критерии проверки:** Верный ответ с полным обоснованием – **7 баллов**. В остальных случаях – **0 баллов**.