

8 класс

1. Папа у Васи силен в математике, но по дороге в гараж забыл код цифрового замка у гаража. В памяти у папы осталось, что все цифры кода различны и их сумма равна 28. Сколько различных кодов нужно перебрать папе, чтобы наверняка открыть гараж, если открывающий механизм замка состоит из четырёх дисков с полным набором цифр на каждом?

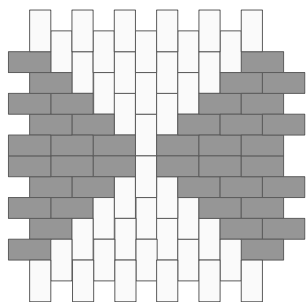
Решение. Среди цифр кода есть 9 и 8. Иначе, поскольку все цифры кода различны, наибольшая сумма цифр кода не превзойдёт $9 + 7 + 6 + 5$. Тогда остальные две цифры кода не больше 7, и их сумма равна 11. Возможны только два варианта: $\{7, 4\}$ и $\{6, 5\}$. Подсчитаем число возможных кодов. Цифра 9 может занять любое из 4 мест. Тогда для 8 останутся три возможности. Итак, различных вариантов расположения 9 и 8 будет $4 \cdot 3 = 12$. Два оставшихся места должны занять либо 7 и 4, либо 5 и 6, причём для каждой пары имеется два варианта. Следовательно, число возможных кодов составляет $12 \cdot 4 = 48$. **Ответ:** 48.

2. Две свечи разной толщины, каждая длиной 24 см, зажжены одновременно. Тонкая свеча сгорает за 4 часа, толстая – за 6 часов. Через какое время одна свеча будет вдвое короче другой? Предполагается, что каждая из свечей горит равномерно, то есть, за равные промежутки времени уменьшается на одну и ту же высоту. Сравниваются несгоревшие свечи.

Решение. Пусть с момента возгорания свечей прошло x часов ($x < 4$). Так как тонкая свеча каждый час уменьшается на $24 : 4 = 6$ см, то за это время она уменьшится на длину $6x$, оставшийся от неё огарок будет иметь длину $24 - 6x$. Аналогично, огарок второй свечи будет иметь длину $24 - 4x$. Чтобы одна свеча стала вдвое короче другой, должно выполняться условие $2(24 - 6x) = 24 - 4x$, откуда $x = 3$. **Ответ:** через 3 часа.

3. Можно ли бесконечный лист клетчатой бумаги так разбить на доминошки 1×2 клетки, чтобы всякая прямая, идущая по линиям сетки, разрежала пополам лишь конечное число доминошек?

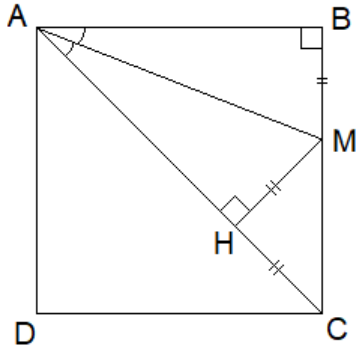
Решение. Да, можно. Возможная схема замощения показана на рисунке. Границы областей, отличающихся ориентацией доминошек, образуют диагональный крест, расходящийся из некоторого центра. Всякая горизонтальная и вертикальная прямая, идущая по линиям сетки, пересекает только конечную часть креста, в которой возможны разрезания доминошек.



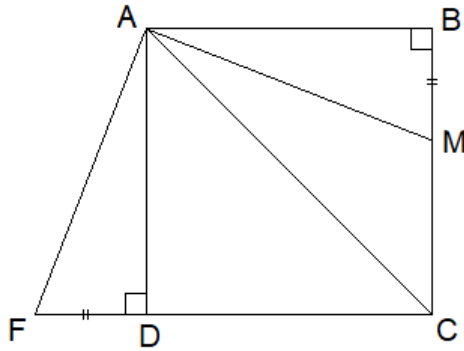
4. Биссектриса угла BAC квадрата $ABCD$ пересекает сторону BC в точке M . Докажите, что $AC = AB + BM$.

Решение. Первый способ. Из точки M опустим перпендикуляр MN на диагональ AC (см. рис.). Тогда треугольники ABM и AMN равны (прямоугольные с

общей гипотенузой и равные острые углы). Получаем $AH = AB = BC$, $MH = BM$. Треугольник HMC равнобедренный (как прямоугольный с острым углом в 45°), следовательно, $HC = HM = BM$. Тогда $AC = AH + HC = AB + BM$, что и требуется доказать.



Второй способ. На продолжении стороны CD за точку D отметим точку F такую, что $DF = BM$ (см. рис.). Тогда треугольники ADF и ABM равны по двум катетам, поэтому $\angle BAM = \angle DAF = 22,5^\circ$, а $\angle AFD = 90^\circ - \angle DAF = 67,5^\circ$. Так как $\angle CAF = \angle CAD + \angle DAF = 45^\circ + 22,5^\circ = 67,5^\circ = \angle AFC$, то треугольник AFC – равнобедренный и $AC = CF = CD + DF = AB + BM$, что и требуется доказать.



5. Можно ли 8 натуральных чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 разбить на две группы по 4 числа в каждой так, чтобы сумма чисел в первой группе равнялась сумме чисел во второй группе, и сумма квадратов чисел в первой группе равнялась сумме квадратов чисел во второй группе?

Решение. Сумма чисел от 1 до 8 равна 36, а сумма их квадратов – 204. Следовательно, нужно найти четвёрку чисел из 1, ..., 8, сумма которых равна 18, а сумма квадратов – 102. Считаем, что эта четвёрка содержит 8. Тогда сумма квадратов остальных трех чисел четвёрки равна 38. Это влечёт, что в четвёрке нет 7 и 6, а есть 5, т.к. $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 < 38$. Тогда сумма двух оставшихся чисел равна $18 - (8 + 5) = 5$, а сумма их квадратов равна $102 - (64 + 25) = 13$. Это однозначно определяет пару чисел 2, 3. **Ответ:** можно разбить на следующие группы $\{2, 3, 5, 8\}$, $\{1, 4, 6, 7\}$.