**Решения задач 8 класса (1-й вариант).**

1. Аркадий, Борис и Виктор катались на электросамокатах, не зная про ограничение скорости. Весь путь был разделён на два участка. Аркадий проехал первый участок со скоростью 48 км/ч, а второй — со скоростью 24 км/ч. Борис проехал первый участок со скоростью 24 км/ч, второй — с постоянной скоростью не меньше 48 км/ч. Виктор оба участка проехал с одной и той же скоростью. Стартовали все одновременно и к финишу приехали тоже одновременно. Докажите, что Виктор ехал со скоростью не меньшей, чем 32 км/ч.

*Пусть каждый из ребят потратил $t$ часов, а длины участков составляют $a$ и $b$ км. Тогда из условия следует, что $a/48 + b/24 = t$ и $a/24 + b/48 \geqslant t$. Сложив и разделив на 2, получим $a/32 + b/32 \geqslant t$. Если скорость Вити будет меньше 32, то потраченное время будет больше, чем $a/32 + b/32$, т.е. больше $t$. Следовательно, эта скорость не превосходит 32 км/час.*

2. По кругу стоят различные числа $y_1$, $y_2$, ..., $y_{2021}$. Может ли случиться так, что

$$y_1 + |y_2| = 3, \quad y_2 + |y_3| = 3, \quad \ldots, \quad y_{2020} + |y_{2021}| = 3 \quad \text{и} \quad y_{2021} + |y_1| = 3\,?$$

*Ответ: нет. Предположим, что одно из чисел, например, $y_1$, отрицательно. Тогда $|y_2| > 3$. При этом из второго уравнения следует, что $y_2 \leqslant 3$. Это возможно лишь если $y_2$ тоже отрицательно. Продолжая так же, получим, что все числа отрицательны. Но это означает, что $y_1 - y_2 = 3$, $y_2 - y_3 = 3$, и т.д., то есть каждое число больше следующего числа на круге. Это, очевидно, невозможно. Таким образом, все числа неотрицательны. Но тогда $y_1 + y_2 = 3 = y_2 + y_3$, откуда $y_1 = y_3$, что противоречит различности чисел.*

3. Прямоугольник с целыми сторонами разрезали на 10 000 прямоугольников (не обязательно с целыми сторонами), проведя 99 горизонтальных и 99 вертикальных линий. Прямоугольники разбиения покрасили в черный и белый цвета так, что никакие два прямоугольника одного цвета не имеют общей стороны. Оказалось, что периметр каждого черного прямоугольника — натуральное число, оканчивающееся на 17 или на 19. Докажите, что количество черных прямоугольников, периметр которых оканчивается на 19, делится на 50.

*Пусть исходный прямоугольник имел размеры $a \times b$. Тогда сумма периметров всех черных прямоугольников равна $100(a + b) \,\vdots\, 100$. Пусть у $n$ черных прямоугольников периметры оканчиваются на 19, а у остальных $5000 - n$ — на 17. Следовательно, $19n + 17(5000 - n) \,\vdots\, 100$, откуда $2n \,\vdots\, 100$ и тогда $n \,\vdots\, 50$.*

4. На стороне $BC$ треугольника $ABC$ отмечены точки $D$ и $E$ так, что $BD = DE$ и $AD = AC$. На отрезке $AD$ отмечена точка $X$, а на отрезке $AC$ — точка $Y$ так, что $DX = AY$. Докажите, что $EX + DY \geqslant AB$.

*Отметим такую точку $Z$, что $AYZB$ — параллелограмм. Тогда $BZ = AY = DX$, и $\angle DBZ = \angle BCA = \angle EDX$ (первое равенство — накрест лежащие углы, второе — равнобедренность треугольника $ACD$). Наконец, $BD = DE$ по условию. Значит, треугольники $DBZ$ и $EDX$ равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $DX = EZ$. Таким образом, $DY + EX = DY + DZ \geqslant YZ = AB$.*

5. Дано 17 восемнадцатизначных чисел $a_1$, $a_2$, ..., $a_{17}$. Могло ли так случиться, что если у всех этих чисел вычеркнуть последнюю цифру, то их сумма будет равна $2a_1$, если предпоследнюю — то $2a_2$, ..., если вторую — то $2a_{17}$?

*Для любого восемнадцатизначного числа $a$ обозначим через $f(a)$ сумму всех чисел, полученных из $a$ вычеркиванием последней, предпоследней, ..., второй цифр. Докажем, что для любого $a$ верно неравенство $f(a) < 2a$: из этого будет следовать, что $f(a_1) + \ldots + f(a_{17}) < 2a_1 + \ldots + 2a_{17}$, то есть описанная в условии ситуация невозможна.*

*Пусть первые две цифры числа $a$ – это $x$ и $y$; следующее за ними 16-значное число обозначим через $z$.*

*При вычеркивании второй цифры получается число $10^{16}x + z$. При вычеркивании любой из других 16 цифр получается 17-значное число, начинающееся на $xy$; оно заведомо меньше чем $10^{16}x + 10^{15}y + 10^{15}$. Поэтому итоговая сумма $f(a)$ меньше чем*

$$10^{16}x + z + 16(10^{16}x + 10^{15}y + 10^{15}) = 17 \cdot 10^{16}x + 16 \cdot 10^{15}y + z + 16 \cdot 10^{15}.$$

*С другой стороны, $2a = 2(10^{17}x + 10^{16}y + z) = 20 \cdot 10^{16}x + 20 \cdot 10^{15}y + 2z$. Поэтому осталось проверить неравенство*

$$17 \cdot 10^{16}x + 16 \cdot 10^{15}y + z + 16 \cdot 10^{15} < 20 \cdot 10^{16}x + 20 \cdot 10^{15}y + 2z.$$

*Оно очевидно: лишние $3 \cdot 10^{16}x = 30 \cdot 10^{15}x$ в правой части заведомо больше чем $16 \cdot 10^{15}$ в левой части (ведь цифра $x$ не может быть равна 0).*