8 класс

1. Вася задумал четырёхзначное число и для каждой пары его соседних цифр выписал на доску их произведение. После этого он стёр одно произведение, и на доске остались числа 20 и 21. Какое наименьшее число мог задумать Вася?

Ответ: 3745.

Решение. Так как выписаны произведения 20 и 21, то среди цифр задуманного числа есть цифры 4, 5 и 3, 7, то есть нам известны все его цифры. Цифры 4 и 5, 3 и 7 должны стоять рядом, поэтому наименьшее число, удовлетворяющее условиям, – это 3745, причём Вася стёр произведение $7 \cdot 4 = 28$.

Критерии. Только ответ — 3 балла. Отмечено, что цифры 4 и 5, 3 и 7 стоят рядом — ещё 4 балла. Полное решение — 7 баллов.

2. Трое друзей живут в домах с разными номерами. Оказалось, что у каждого из них номер этажа совпадает с номером дома одного из его друзей. Может ли эта ситуация сохраниться, если

а) один из друзей переедет в своём доме на один этаж выше?

б) каждый из друзей переедет в своём доме на один этаж выше?

Ответ: *а) может; б) не может.*

Решение. *а*) Назовём трёх друзей Антон, Борис и Сергей. Пусть Антон живёт в доме с номером a. Номер его этажа совпадает с номером дома b одного из его друзей, например, Бориса. По условию $a \neq b$. Предположим, Антон переехал на этаж выше. Теперь номер его этажа равен $b+1$, он не совпадает с b. Значит, он равен номеру дома Сергея, то есть $b + 1 = c$.

Итак, если один из друзей переехал на этаж выше с сохранением свойства номера, то номера его друзей отличаются на 1. Вариантов расселения друзей очень много. Например,

	Номер дома	**Номер этажа до переезда**	**Номер этажа после переезда**
Антон	2	3	4
Борис	3	4	4
Сергей	4	2	2

Некоторые номера этажей совпадают, но это не запрещено условием.

б) Если каждый из друзей переехал с сохранением свойства номера этажа, то у двух остальных номера отличаются на единицу. Но это условие не может выполняться для каждой пары номеров домов! Если минимальный номер n, то другие равны $n+1$ и $n+2$, а разница между n и $n+2$ не равна 1.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Пример в пункте *а*) — 3 балла. Решение пункта *б*) — 4 балла.

3. Последнюю цифру четырёхзначного числа переставили в начало (например, $1234 \to 4123$) и полученное число сложили с исходным. Сумма оказалась равной 3333. Чему равно исходное число, если известно, что в его записи нет цифры 0? Найдите все возможные варианты.

Ответ: 1212 *и* 2121.

Решение. Пусть $\overline{xyzt}$ — искомое четырёхзначное число, и $\overline{txyz}$ — полученное из него. Их сумма равна $S = \overline{xyzt} + \overline{txyz} = 11(100x + 10y + z) + 1001t = 11(\overline{xyz} + 91t) = 3333$. Отсюда $\overline{xyz} + 91t = 303$. Цифра t отлична от нуля и может принимать только значения 1 и 2. (Если $t \geqslant 3$, то $\overline{xyz} < 100$.) Если $t = 1$, то $\overline{xyz} = 212$ и $\overline{xyzt} = 2121$. Если $t = 2$, то $\overline{xyz} = 121$ и $\overline{xyzt} = 1212$.

Таким образом, условию удовлетворяют два числа: 1212 и 2121.

Критерии. Найдено хотя бы одно из чисел — 2 балла. Доказано, что первая (справа) цифра t может принимать только значения 1 или 2, — ещё 2 балла. Полное решение — 7 баллов.

4. Квадрат 10×10 разрезали по клеточкам на 17 прямоугольников, у которых длины обеих сторон больше 1. Какое наименьшее число квадратов могло оказаться среди этих прямоугольников? Приведите пример такого разрезания.

Ответ: *один квадрат.*

Решение. Предположим, что среди прямоугольников нет ни одного квадрата. Пусть a и b — стороны произвольного прямоугольника, причём $a > b$. Так как целое число b больше 1, то $b \geqslant 2$, и значит, $a \geqslant 3$. Следовательно, площадь каждого такого прямоугольника $a \times b$ не менее $2 \cdot 3 = 6$ клеток. Но тогда 17 прямоугольников должны занимать не менее $17 \cdot 6 = 102$ клеток, в то же время исходный квадрат 10×10 имеет всего 100 клеток.

На рисунке 1 приведён пример разрезания квадрата 10×10 на 17 прямоугольников, среди которых ровно один квадрат.

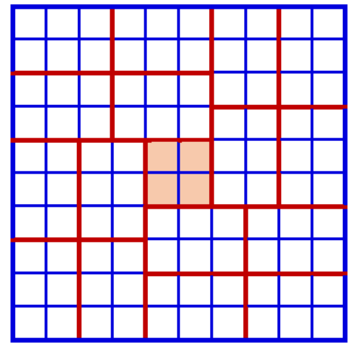

Рис. 1

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказано, что площадь каждого неквадратного прямоугольника не менее 6 клеток — 1 балл. Доказано, что среди прямоугольников есть квадрат — ещё 3 балла. Правильный пример разрезания — ещё 3 балла. Полное решение — 7 баллов.

5. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Известно, что $AB = BC = CD$, $AO = 8$ и $\angle BOC = 120°$. Чему равно DO?

Ответ: $DO = 8$.

Решение. Отметим на прямой AC такую точку E, что треугольник BOE — равносторонний (рис. 2). Докажем равенство треугольников BAE и BCO. Действительно, поскольку $AB = BC$, треугольник ABC — равнобедренный, и значит, $\angle BAC = \angle BCA$. Кроме того, отметим ещё одну пару равных углов $\angle AEB = \angle BOC = 120°$. Таким образом, треугольники BAE и BCO равны по стороне и двум углам, отсюда $AE = CO$ и $AO = AE + EO = CO + BO$.

Если отметить на прямой BD такую точку F, что треугольник COF — равносторонний, то аналогичными рассуждениями получим $DO = BO + CO$. Отсюда следует, что $DO = AO = 8$.

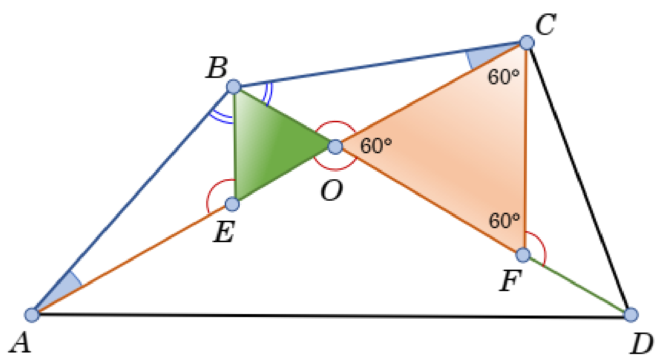

Рис. 2

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Правильное дополнительное построение, связанное с равносторонним треугольником — 2 балла. Установлено равенство $AO = CO + BO$ или аналогичное ему $DO = BO + CO$ — 4 балла. Полное решение — 7 баллов.