

8 класс

8.1. Делится ли число $10^{2021} - 2021$ на 9?

Ответ: нет.

Решение. Запишем число в виде $10^{2021} - 1 - 2020$. Число $10^{2021} - 1$ имеет вид $99\dots 9$ и делится на 9, число 2020 – нет. Значит и их разность на 9 не делится.

8.2. Известно, что $k \neq b$ и графики функций $y = kx + k$, $y = bx + b$ и $y = ax + c$ пересекаются в одной точке. Значит ли это, что $a = c$?

Ответ: да.

Решение. Ясно, что точка $(-1, 0)$ принадлежит первым двум прямым. Так как $k \neq b$, то эти прямые различны, значит, другой общей точки у них нет. Следовательно, точка $(-1, 0)$ принадлежит и графику третьей функции, то есть $0 = -a + c$.

8.3. В треугольнике ABC медиана AM перпендикулярна биссектрисе BD . Найдите периметр треугольника, если известно, что $AB = 1$, а длины всех сторон – целые числа.

Ответ: 5.

Решение. Пусть O – точка пересечения медианы AM и биссектрисы BD . Треугольники ABO и MBO равны (по общей стороне BO и двум прилежащим к ней углам). Отсюда $AB = BM = 1$ и $CM = 1$, так как AM – медиана. Таким образом, $AB = 1$, $BC = 2$. В силу неравенства треугольника $AC < AB + BC = 3$ и $AC > BC - AB = 1$, а поскольку по условию длина AC равна целому числу, то $AC = 2$ и периметр треугольника равен 5.

8.4. Маша и Катя сплели венки из полевых цветов: одуванчиков, васильков и ромашек. Общее количество цветов в венках обеих девочек оказалось равным 70, причем у Маши одуванчики составили $5/9$, а у Кати $7/17$ составили ромашки. Сколько васильков в венке каждой из девочек, если одуванчиков и ромашек у них поровну?

Ответ: у Маши в венке 2 василька, а у Кати васильков нет.

Решение. Из условия следует, что у Маши в венке всего $9n$ цветов, а Кати – $17k$, где n и k — целые неотрицательные числа. Тогда в венках девочек по $5n$ одуванчиков и по $7k$ ромашек. Так как всего в венках 70 цветов, получаем уравнение $9n + 17k = 70$.

Таким образом, $70 - 17k$ должно делиться на 9. Перебором находим, что подходит только $k = 2$, откуда $n = 4$. Значит у Маши в венке – 36 цветов, а у Кати – 34. Тогда в каждом венке по $5n = 20$ одуванчиков и по $7k = 14$ ромашек, следовательно, у Маши в венке 2 василька, а у Кати васильков нет.

8.5. Дан квадрат 5×5 клеток. За один ход можно вписать в любую клетку число, равное количеству клеток, соседних с ней по стороне, в которых уже стоят числа. После 25 ходов в каждой клетке будет стоять число. Докажите, что значение суммы всех получившихся чисел не зависит от порядка заполнения клеток.

Решение. Рассмотрим все единичные отрезки, которые являются общими сторонами для двух клеток. Таких отрезков ровно сорок – 20 вертикальных и 20 горизонтальных. Если отрезок разграничивает две заполненные клетки, то будем говорить, что он "окрашен". Заметим, что, когда мы пишем какое-то число в клетке, он указывает количество отрезков, которые не были окрашены до заполнения этой клетки, а теперь стали окрашенными. Когда мы приступим к суммированию, окрашены все 40 отрезков, то есть сумма чисел, всегда будет равна 40.