

## 8 класс

**8.1.** Делится ли число  $10^{2021} - 2021$  на 9?

**Ответ:** нет.

**Решение.** Запишем число в виде  $10^{2021} - 1 - 2020$ . Число  $10^{2021} - 1$  имеет вид  $99\dots 9$  и делится на 9, число 2020 – нет. Значит и их разность на 9 не делится.

**8.2.** Известно, что  $k \neq b$  и графики функций  $y = kx + k$ ,  $y = bx + b$  и  $y = ax + c$  пересекаются в одной точке. Значит ли это, что  $a = c$ ?

**Ответ:** да.

**Решение.** Ясно, что точка  $(-1, 0)$  принадлежит первым двум прямым. Так как  $k \neq b$ , то эти прямые различны, значит, другой общей точки у них нет. Следовательно, точка  $(-1, 0)$  принадлежит и графику третьей функции, то есть  $0 = -a + c$ .

**8.3.** В треугольнике  $ABC$  медиана  $AM$  перпендикулярна биссектрисе  $BD$ . Найдите периметр треугольника, если известно, что  $AB = 1$ , а длины всех сторон – целые числа.

**Ответ:** 5.

**Решение.** Пусть  $O$  – точка пересечения медианы  $AM$  и биссектрисы  $BD$ . Треугольники  $ABO$  и  $MBO$  равны (по общей стороне  $BO$  и двум прилежащим к ней углам). Отсюда  $AB = BM = 1$  и  $CM = 1$ , так как  $AM$  – медиана. Таким образом,  $AB = 1$ ,  $BC = 2$ . В силу неравенства треугольника  $AC < AB + BC = 3$  и  $AC > BC - AB = 1$ , а поскольку по условию длина  $AC$  равна целому числу, то  $AC = 2$  и периметр треугольника равен 5.

**8.4.** Маша и Катя сплели венки из полевых цветов: одуванчиков, васильков и ромашек. Общее количество цветов в венках обеих девочек оказалось равным 70, причем у Маши одуванчики составили  $5/9$ , а у Кати  $7/17$  составили ромашки. Сколько васильков в венке каждой из девочек, если одуванчиков и ромашек у них поровну?

**Ответ:** у Маши в венке 2 василька, а у Кати васильков нет.

**Решение.** Из условия следует, что у Маши в венке всего  $9n$  цветов, а Кати –  $17k$ , где  $n$  и  $k$  — целые неотрицательные числа. Тогда в венках девочек по  $5n$  одуванчиков и по  $7k$  ромашек. Так как всего в венках 70 цветов, получаем уравнение  $9n + 17k = 70$ .

Таким образом,  $70 - 17k$  должно делиться на 9. Перебором находим, что подходит только  $k = 2$ , откуда  $n = 4$ . Значит у Маши в венке – 36 цветов, а у Кати – 34. Тогда в каждом венке по  $5n = 20$  одуванчиков и по  $7k = 14$  ромашек, следовательно, у Маши в венке 2 василька, а у Кати васильков нет.

**8.5.** Дан квадрат  $5 \times 5$  клеток. За один ход можно вписать в любую клетку число, равное количеству клеток, соседних с ней по стороне, в которых уже стоят числа. После 25 ходов в каждой клетке будет стоять число. Докажите, что значение суммы всех получившихся чисел не зависит от порядка заполнения клеток.

**Решение.** Рассмотрим все единичные отрезки, которые являются общими сторонами для двух клеток. Таких отрезков ровно сорок – 20 вертикальных и 20 горизонтальных. Если отрезок разграничивает две заполненные клетки, то будем говорить, что он "окрашен". Заметим, что, когда мы пишем какое-то число в клетке, он указывает количество отрезков, которые не были окрашены до заполнения этой клетки, а теперь стали окрашенными. Когда мы приступим к суммированию, окрашены все 40 отрезков, то есть сумма чисел, всегда будет равна 40.