Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2021 – 2022 учебный год

Решения и указания

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов. При неполном решении задачи, баллы обычно выставляются пропорционально тому, какой процент полезных интеллектуальных усилий, нужных для её решения, был затрачен. Например, не следует вообще давать баллы за рассмотрение легких частных случаев, которые никак не проясняют общей картины.

За задачи, которые решены почти полностью, но в решении которых допущены мелкие ошибки (скажем, арифметические), мы рекомендуем вычитать один или два балла в зависимости от характера допущенной ошибки.

Следует отметить, что проверка решений задач и выставление баллов является в любом случае процессом **творческим** и не до конца поддаётся формализации. Поэтому трудно дать рекомендации, охватывающие все возможные ситуации, которые могут возникнуть в ходе проверки. Решения задач, полученных учениками, безусловно, могут отличаться от авторских. Единственным критерием в этом случае является правильность рассуждений.

Некоторые предложения по выставлению баллов, касающиеся отдельных задач, приведены ниже.

В тех задачах, где требуется построить какой-либо пример, не обязательно приводить рассуждения о том, как именно он был получен. В случае, если правильность примера легко проверяется, его достаточно всего лишь предъявить. К этой группе задач относятся VII.5, VIII.2 (где желательно хотя бы краткое обоснование). Однако во многих задачах, помимо верного примера, нужно бывает обосновывать или единственность найденного решения (как в числовом ребусе), или тот факт, что найденное число является наименьшим возможным.

Задачи VII.1, VII.4, VIII.1, VIII.3, VIII.4, X.1, X.4, XI.5 относятся к числу обычных школьных. Их оценка должна производиться в соответствии с обычной практикой. Максимальный балл даётся за полное решение.

В задаче VII.2 за верный ответ в решении числового ребуса, без обоснования единственности решения, присуждается 3 балла. То же самое касается задачи VII.3, если верный ответ указан, но не обоснован.

В задаче VIII.5 баллы даются только при наличии полного обоснования. За использование идеи раскраски можно давать 1 балл.

В задаче IX.1 за верную идею подсчёта можно давать до 3 баллов, если в вычислениях допущены ошибки. При этом, если у кого-то фигурирует допущение, что двузначное число может начинаться с нуля (что является грубой ошибкой), а всё остальное верно, даётся не более 1 балла.

В задаче IX.2 требуется полное обоснование ответа.

В задаче IX.3 за оба найденных варианта без обоснования можно давать до 3 баллов.

За верный ответ в задаче IX.4 можно давать до 2 баллов. Если разобран пример с 17 серединами, можно давать до 3 баллов.

В задаче XI.5 за пример с 13 кораблями даётся 2 балла.

В задаче X.2 за верный пример (без обоснования) можно давать до 3 баллов.

В задачах X.3, XI.3 за верное нахождение двух пар корней можно присуждать до 3 баллов.

В задаче X.5 за попытки указать конкретную стратегию игры, но без полного и точного обоснования, баллы не присуждаются.

В задаче XI.1 баллы не присуждаются за использование приближённых вычислений с десятичными цифрами. Применение формул сокращённого умножения, с точным сравнением квадратных корней, вполне допустимо.

В задаче XI.2 годится любая логически обоснованная схема с двумя взвешиваниями.

За задачу XI.4 можно давать до 1 балла за полное рассмотрение одного или нескольких частных случаев (например, чисел, составленных из заданного набора цифр типа 1, 2, 3 с полным анализом всех остатков).

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2021 – 2022 учебный год

8 класс (решения)

1. В коробке с табличкой БЧ оба шарика имеют один и тот же цвет. Вынимаем из неё один шарик. Допустим, что он белый. Тогда в этой коробке два белых шарика. В коробке с табличкой ЧЧ оказываются белый и чёрный шарик, так как других вариантов нет. Наконец, в коробке с табличкой ББ оказывается два чёрных шарика.

   Случай, когда вынимаемый шар является чёрным, полностью аналогичен рассмотренному.

2. Ответ: да, можно.

   Рассмотрим такое заполнение таблицы:

0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0
1	0	1
0	1	1

   В каждй строке есть два одинаковых элемента. Легко проверить, что в любой другой строке эти элементы стоят уже на других местах. Например, если это два нуля, то они только один раз стоят в 1-м и 2-м столбце. Поэтому четвёрки одинаковых чисел на пересечении двух строк и столбцов не возникает.

3. Ответ: скорость первого автомобиля в 2 раза больше.

   Пусть скорость одного автомобиля в k раз больше скорости другого. Поскольку они выехали одновременно, один автомобиль проедет в k раз большее расстояние. После этого участки поменяются, и более медленный автомобиль, скорость которого в k раз меньше, должен будет преодолеть в k раз большее расстояние. Понятно, что у него на это уйдёт в k^2 раз больше времени. В нашем случае это число равно 4, откуда $k = 2$. То есть скорость первого автомобиля (которому осталось меньше времени ехать) вдвое больше скорости второго.

4. Ответ: нет, не может.

   Рассмотрим четырехугольник $ABCD$ и проведем его диагонали. Пусть они пересекаются в точке O. Рассмотрим наиболее удаленную от неё сторону. Без ограничения общности можно считать, что это сторона AB. Поскольку расстояние от точки O до прямой AB не меньше расстояния от O до прямой AD, величина угла OAB не меньше величины угла OAD. Поэтому биссектриса угла A не может проходить внутри угла OAD и тем самым не может пересекать сторону CD во внутренней точке. Аналогично доказывается, что биссектриса угла B не пересекает сторону CD во внутренней точке. Таким образом, сторону CD не пересекает во внутренней точке никакая из биссектрис.

5. Ответ: нет, нельзя.

   В квадрате 25 клеток, а 8 прямоугольников 1×3 в сумме имеют 24 клетки. Значит, среди 8 прямоугольников ровно один должен быть вида 1×4. Покажем, что этими прямоугольниками квадрат не покрыть.

   Рассуждая от противного, временно удалим крайнюю клетку прямоугольника 1×4. Тогда квадрат без одной клетки окажется покрыт прямоугольниками 1×3. Раскрасим клетки квадрата в три цвета: в первой строке в порядке 12312, во второй 23123, в третьей 31231, и далее повторим раскраску первой и второй строк. Легко видеть, что все цвета встречаются поровну кроме цвета 2. Это значит, что если мы покрыли квадрат без одной клетки прямоугольниками 1×3, то свободная клетка имеет цвет 2 как при этой раскраске, так и при всех симметричных. Но тогда это только центральная клетка.

   Осталось заметить, что она не может быть крайней ни для какого прямоугольника 1×4.