Ключи муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике
2021-2022 учебный год
8 класс
Продолжительность олимпиады: 235 минут.

Код участника:____________________

Критерии оценивания работ участников:

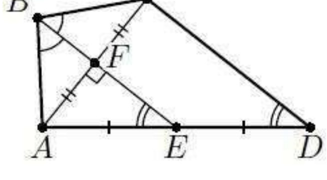
Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Максимально возможное количество баллов за каждое задание: 7 баллов
Максимальное количество баллов по всем возрастным параллелям – 35 баллов.
Итог подводится по сумме баллов, набранных участником.

8.1. Приведите пример шести различных натуральных чисел таких, что произведение любых двух из них не делится на сумму всех чисел, а произведение любых трех из них — делится.

Решение.
Пусть p — достаточно большое нечётное простое число. Представим число p^2 в виде суммы $a_1+\ldots+a_6$ различных натуральных чисел, не делящихся на p. Числа pa_1, …, pa_6 будут искомыми: произведение любых двух из них не делится на их сумму, равную p^3, а произведение любых трёх — делится.
Пример получается уже при p = 5: разложение 25 = 1+2+3+4+6+9 даёт набор чисел:
5, 10, 15, 20, 30, 45.
Критерии. Верный пример без обоснования: 5 баллов. Верный пример с обоснованием: 7 баллов. Объяснять, как был найден пример, не обязательно.

8.2. В выпуклом четырёхугольнике ABCD биссектриса угла B проходит через середину стороны AD, а $\angle C = \angle A + \angle D$. Найдите угол ACD.



Решение. Пусть E — середина стороны AD, а F — точка пересечения BE и AC. Из условия имеем: $\angle B = 360 - 2(\angle A + \angle D)$, откуда $\angle AEB = 180 - \angle A - \angle B/2 = \angle D$. Значит, BE || CD, и EF — средняя линия треугольника ACD, то есть AF = FC. Таким образом, BF

— биссектриса и медиана треугольника ABC, а, значит, и его высота. Следовательно, прямая CD, параллельная BF, также перпендикулярна AC, откуда и вытекает ответ.
Ответ. Угол ACD равен 90.

Критерии. Только ответ: 0 баллов.

8.3. Имеется 11 пустых коробок. За один ход можно положить по одной монете в какие-то 10 из них. Играют двое, ходят по очереди. Побеждает тот, после хода которого впервые в одной из коробок окажется 21 монета. Кто выигрывает при правильной игре?

Решение.
Занумеруем коробки: 1, . . ., 11 и будем обозначать ход номером той коробки, куда мы не клали монету. Можно считать, что первый игрок начал игру ходом 1. Чтобы победить, второму надо, независимо от игры первого, сделать ходы 2, . . ., 11. Этими десятью ходами вместе с ходом первого в каждую коробку будет положено по 10 монет. Кроме того, найдется коробка (назовем ее *A*), в которую первый каждым своим ходом со 2 по 11 клал по монете. Тем самым, после 11 хода первого в коробке *A* окажется 20 монет, и ни в какой коробке не окажется больше. Второй игрок своим 11-м ходом должен положить монеты так, чтобы в коробку *A* попала монета. Тем самым, он выигрывает.
Ответ. Выигрывает второй

8.4. В равнобокой трапеции одно из оснований в три раза больше другого. Угол при большем основании равен 45°. Покажите, как разрезать эту трапецию на три части и сложить из них квадрат. Обоснуйте решение.

Решение. 1 способ.

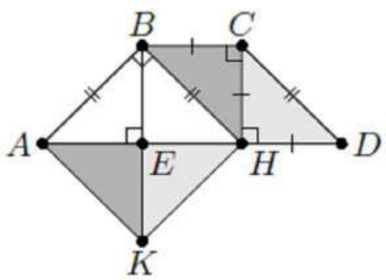


Рис.1

Пусть ABCD – данная трапеция (рис. 1). Проведем высоты BE и CH. Так как трапеция равнобокая, то $AE = DH = \frac{AD - BC}{2} = \frac{3BC - BC}{2} = BC$. В прямоугольном треугольнике CHD острый угол равен 45°, поэтому этот треугольник – равнобедренный. Треугольник BCH равен треугольнику CHD (по дум катетам). Из треугольников ABH, BCH и CHD можно сложить квадрат ABHK.

Решение. 2 способ.
Пусть ABCD –данная трапеция. Выберем точки E и H на основании AD так, что AE=EH=DH (рис. 2). Опустим из точек E и H высоты EK и HL на боковые стороны трапеции. F – точка пересечения прямых AB и CD, G – точка пересечения прямых KE и LH. Тогда треугольники AKE, HLD, BFC и EGH – равные прямоугольные равнобедренные. Следовательно, из треугольников AKE,

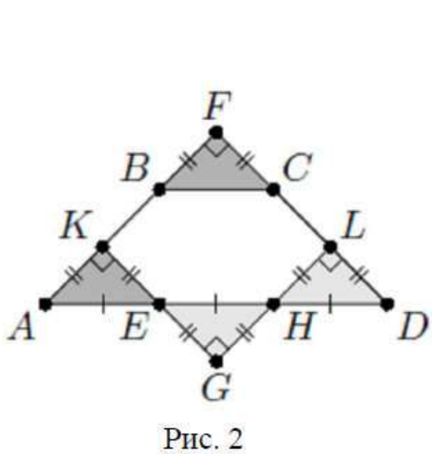


Рис. 2

Возможны другие способы решения.
Критерии. 7 баллов – верное, обоснованное решение, 3 балла - верно показано, как разрезать и как сложить, но не приведены обоснования.

8.5. У разбойников есть 13 слитков золота. Имеются весы, с помощью которых можно узнать суммарный вес любых двух слитков. Придумайте, как за 8 взвешиваний выяснить суммарный вес всех слитков.

Решение.

Возьмем три первых слитка и взвесим их попарно: С1+С2, С1+С3, С2+С3, затратив три взвешивания. Сложив результаты этих взвешиваний и поделив пополам, найдем суммарный вес этих трех слитков: ((С1+С2) +(С1+С3) +(С2+С3))/2 = С1+С2+С3. За оставшиеся пять взвешиваний найдем вес остальных 10 слитков: объединим их в 5 пар и взвесим каждую пару.

Критерии

Правильные взвешивания и объяснение, как по их результатам узнать суммарный вес слитков – 7 баллов.

Если используется запрещенное взвешивание (например, в какой-то момент взвешивается только один слиток) – 0 баллов.