9 класс

9.1. (*7 баллов*)

Над двумя различными натуральными числами проделывают четыре операции:

а) находят их сумму;

б) из большего вычитают меньшее;

в) находят их произведение;

г) большее число делят на меньшее.

Сумма результатов всех четырёх операций равна 3^5. Что это за числа?

Ответ: 54 и 2; 24 и 8.

Решение: Пусть x и y – искомые натуральные числа, $x > y$:

$$x + y + x - y + xy + \frac{x}{y} = 3^5,$$

$$2x + xy + \frac{x}{y} = 3^5,$$

$$2xy + xy^2 + x = 3^5 y,$$

$$x(y^2 + 2y + 1) = 3^5 y,$$

$$x(y + 1)^2 = 3^5 y,$$

$$x = \frac{3^5 y}{(y + 1)^2}.$$

Так как x – натуральное число, то 3^5 делится нацело на $(y + 1)^2$. Тогда $(y + 1)^2 = 3^2$ или $(y + 1)^2 = 3^4$. Из первого равенства $y = 2$, из второго - $y = 8$. Получаем две пары значений x и y: 54 и 2; 24 и 8.

9.2. (*7 баллов*)

Докажите, что если a, b, c – длины сторон треугольника, то уравнение $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2) \cdot x + c^2 = 0$ не имеет решений.

Решение: Найдём дискриминант данного уравнения

$$D = (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2 = (b^2 + c^2 - a^2 - 2bc)(b^2 + c^2 - a^2 + 2bc) =$$
$$= ((b - c)^2 - a^2)((b + c)^2 - a^2) =$$
$$= (b - c - a)(b - c + a)(b + c - a)(b + c + a).$$

Так как $b + c + a > 0$, $b + c - a > 0, b - c + a > 0, b - c - a < 0$, то $D < 0$. Значит, данное уравнение не имеет решений.

9.3. (*7 баллов*)

По кольцевой дорожке длиной 60 см движутся в обе стороны муравьи со скоростью 1 см/с. Когда два муравья сталкиваются, они мгновенно разворачиваются и движутся с той же скоростью в противоположных направлениях. Оказалось, что за минуту произошло 48 попарных столкновений. Сколько муравьев могло быть на дорожке?

Ответ: 10 или 11 или 14 или 25.

Решение: Заметим, что ситуация не изменится, если считать, что после столкновении муравьи не разворачиваются, а продолжают свое движение, не меняя направления и скорости. Пусть какие-то два муравья столкнулись, тогда через 30 секунд после этого каждый из них проползет половину круга и они столкнутся вновь.

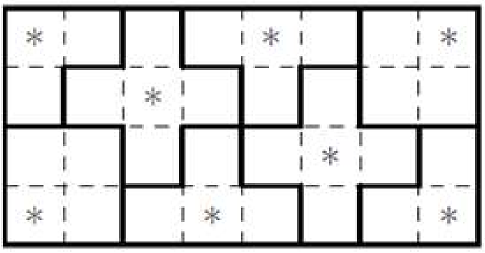
Следовательно, у каждой такой пары произойдет ровно 2 столкновения за минуту. Таким образом, если x муравьев ползут в одну сторону, а y муравьев – в противоположную, то $2xy = 48$, $xy = 24$. Следовательно, искомая величина $x + y$ может принимать значения: $1 + 24 = 25$, $2 + 12 = 14$, $3 + 8 = 11$, $4 + 6 = 10$.

9.4. (*7 баллов*)

На совместной конференции партий лжецов и правдолюбов в президиум было избрано 32 человека, которых рассадили в четыре ряда по 8 человек. В перерыве каждый член президиума заявил, что среди его соседей есть представители обеих партий. Известно, что лжецы всегда лгут, а правдолюбы всегда говорят правду. При каком наименьшем числе лжецов в президиуме возможна описанная ситуация? (Два члена президиума являются соседями, если один из них сидит слева, справа, спереди или сзади от другого).

Ответ: при восьми лжецах.

Решение: Разобьем все места в президиуме на восемь групп так, как показано на рисунке. Если лжецов меньше восьми, то в какой-то из этих групп сидят одни правдолюбы, чего быть не может. Полученное противоречие показывает, что лжецов не меньше восьми. На рисунке показано, как можно рассадить в президиуме восемь лжецов так, чтобы выполнялось условие задачи.



	Л				Л		
			Л				Л
Л				Л			
		Л				Л	

Комментарии. *При отсутствии примера рассадки лжецов – 5 баллов*.

9.5. (*7 баллов*)

На берегу круглого озера четыре пристани K, L, P, Q. От пристани K отплывает катер, от L – лодка. Если катер поплывет прямо в P, а лодка прямо в Q, то они столкнутся в некоторой точке X озера. Докажите, что если катер поплывет в Q , а лодка – в P, то они достигнут этих пристаней одновременно.

Решение: Пусть u и v – скорости катера и лодки. Треугольники KXQ и LXP подобны. Пусть t - время движения лодки и катера до момента встречи в точке X, тогда $KX = ut,\ LX = vt$.

Тогда из подобия треугольников KXQ и LXP следует:

$$\frac{KQ}{LP} = \frac{KX}{LX} = \frac{u}{v}.$$

Или

$$\frac{KQ}{u} = \frac{LP}{v}.$$

Следовательно, $t_л = t_к$, то есть время движения катера по отрезку KQ совпадает со временем движения лодки по отрезку LP.