Условия и решения задач
(районная математическая олимпиада 2021 г.)

9 класс

1. Сколько можно составить различных треугольников из: а) 40 спичек; б) 43 спичек?
Решение. Нам надо найти количество троек натуральных чисел x, y, z таких, что $x \le y \le z$, $x+y+z=40$ и $x+y>z$. Из этих неравенств вытекает, что z может принимать значения, удовлетворяющие неравенствам $14 \le z \le 19$. Если $z=19$, то $x+y=21$, причем $x \le y \le 19$. Поэтому $11 \le y \le 19$, и мы имеем 9 треугольников с $z=19$. Точно так же устанавливаем, что число треугольников, для которых z = 18, 17, 16, 15, 14, равно соответственно 8, 6, 5, 3, 2, а всего имеем 33 треугольника. Аналогично получаем, что число треугольников с периметром 43 равно 44.
Ответ: а) 33; б) 44.

2. Решите уравнение

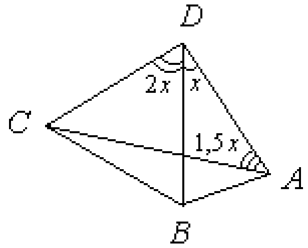
$$\sqrt{3x-2-x^2}+\sqrt{x^2-4x+3}=\sqrt{2}\left(1-\sqrt{x}\right).$$

Решение. Решая систему неравенств

$$\begin{cases} 3x-2-x^2 \ge 0, \\ x^2-4x+3 \ge 0 \end{cases}$$

получаем, что область определения функции, стоящей в левой части уравнения, есть $\{1\}$. Область определения функции, стоящей в правой части уравнения, есть числовой луч $[0;+\infty)$. Следовательно, область определения уравнения есть $\{1\}$. Проверкой убеждаемся, что $x = 1$ – корень уравнения.
Ответ: 1.

3. В четырёхугольнике *ABCD* *AD* = *BD* = *CD*. Угол *BDC* в два раза больше угла *BDA*, а углы *BDA* и *CAD* относятся как 2:3. Найдите углы четырёхугольника.
Решение. Пусть угол *BDA* равен x (см. рисунок), тогда по условию угол *BDC* равен $2x$, угол *CAD* равен $1{,}5x$. Так как $AD = BD = = CD$, то точка *D* является центром окружности, проходящей через точки *A*, *B* и *C*.
Треугольник ΔADB равнобедренный ($AD = BD$), значит, угол *DAB* равен $90° - 0{,}5x$. Тогда $\angle CAB = \angle DAB - \angle DAC = 90° - 0{,}5x - 1{,}5x = 90° - 2x$. Угол *CDB* – центральный угол дуги, стягивающейся хордой *BC*, а угол *CAB* – вписанный, опирающийся на эту дугу. Следовательно, $\angle CDB = 2\angle CAB$, а, значит, имеем уравнение $2x = 2(90° - 2x)$, решив которое, найдем $x = 30°$. Теперь легко найти углы четырехугольника *ABCD*.
Ответ: 75°, 135°, 60°, 90°.



4. Дана система

$$\begin{cases} x + y + z = 28, \\ 2x - y = 32, \end{cases}$$

где *x*>0, *y*>0 *z*>0. Что больше *x* или *y*?

Решение. Так как $z>0$, то $x + y < 28$. Из второго уравнения и условия $y > 0$ следует, что $y = 2x - 32$ и $2x - 32 > 0$, а значит, $x > 16$. Из неравенств $x+y < 28$ и $x > 16$ следует, что $y < 12$, то есть $x>y$.

Ответ: $x > y$.

5. Докажите, что многочлен $x^{95} + x^{94} + x^{93} + \ldots + x^2 + x + 1$ делится на многочлен $x^{31} + x^{30} + x^{29} + \ldots + x^2 + x + 1$.

Решение. Преобразуем:

$$x^{95} + x^{94} + x^{93} + \ldots + x^2 + x + 1 =$$
$$= \left(x^{95} + x^{94} + x^{93} + \ldots + x^{64}\right) + \left(x^{63} + x^{62} + \ldots + x^{32}\right) + \left(x^{31} + x^{30} + \ldots + 1\right) =$$
$$= x^{64}\left(x^{31} + x^{30} + \ldots + 1\right) + x^{32}\left(x^{31} + x^{30} + \ldots + 1\right) + \left(x^{31} + x^{30} + \ldots + 1\right) =$$
$$= \left(x^{31} + x^{30} + \ldots + 1\right)\left(x^{64} + x^{32} + 1\right) .$$

Что и требовалось доказать.