9 класс

9.1. В викторине приняло участие 10 учеников, которые всего дали 42 правильных ответа. Докажите, что по крайней мере 2 ученика дали одинаковое количество правильных ответов (возможно и по нулю).

Решение. Допустим, что все ученики дали разное количество правильных ответов. Тогда 10 учеников дали не менее 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45 (правильных ответов), что противоречит условию. Значит, найдутся ученики, давшие одинаковое количество правильных ответов.

9.2. Электронные часы показывают время от 00.00.00 до 23.59.59. Сколько времени в течение суток на табло часов горит число, которое читается одинаково слева направо и справа налево?

Ответ. 96 секунд.

Решение. Если на табло горят цифры *ab.cd.mn*, то $a = 0, 1, 2, 0 \leq b \leq 9, 0 \leq c \leq 5,$ $0 \leq d \leq 9, 0 \leq m \leq 5, 0 \leq n \leq 9$. Поэтому если $a = n$, $b = m$, $c = d$, то симметричное число на табло однозначно определяется по цифрам a, b и c, где $a = 0, 1, 2, 0 \leq b \leq 5, 0 \leq c \leq 5$. При этом если a = 0 или 1, то b и c – любые цифры от 0 до 5, количество таких наборов чисел равно 2 · 6 · 6 = 72. Если же a = 2, то b = 0, 1, 2, 3; $0 \leq c \leq 5$ и количество таких наборов равно 4 · 6 = 24. Всего 72 + 24 = 96 наборов чисел, каждый их которых горит 1 секунду.

9.3. Разложить на множители выражение $a^3(b-c) + c^3(a-b) - b^3(a-c)$.

Ответ. $(a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c)$.

9.4. Существует ли составное 2021-значное натуральное число, которое при замене любых трёх соседних цифр на произвольные три цифры остается составным?

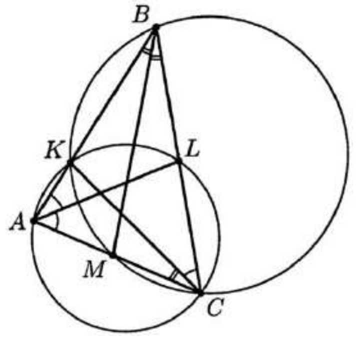
Ответ. Да, существует.

Решение. Пусть искомое составное число чётное. Тогда при замене любой тройки цифр, отличной от последней, получим опять чётное число (т.е. составное). Построим число N, которое оканчивается на 000, так что оно будет чётным. Заменить последнюю тройку чисел числа N – это всё равно что прибавить к N некоторое трёхзначное число. Значит, нам достаточно найти число, оканчивающееся на 000 и такое, чтобы числа $N, N+1, \dots, N+999$ были составными.

Перемножим нечётные числа от 1001 до 1999. Поскольку их 500, а каждое из них меньше 2000, то их произведение меньше, чем $2000^{500} = 10000^{500} = 10^{2000}$. Припишем к этому числу справа несколько нулей, а затем цифру 1 и ещё три нуля так, чтобы общее количество цифр было 2021.

Покажем, что полученное число удовлетворяет условиям задачи. Как было замечено, если в полученном числе не менять последнюю цифру, то число останется чётным. Если изменить последние три нуля на чётное число, то число также останется чётным. Если поменять последние три нуля на нечётное число abc, то последние четыре цифры образуют число $1abc$ на которое делится построенное число, так как $1abc$ входит в произведение нечётных чисел от 1001 до 1999.

9.5. *AL* и *BM* – биссектрисы треугольника *ABC*. Окружности, описанные около треугольников *ALC* и *BMC*, вторично пересекаются в точке *K*, лежащей на стороне *AB*. Найдите величину угла *ACB*.



Ответ. $\angle ACB = 60°$.

Решение. Проведем отрезок *CK*. $\angle LCK = \angle LAK$ (эти углы вписаны в окружность и опираются на одну и ту же дугу). Аналогично, $\angle MCK = \angle MBK$. Так как $\angle ACB = \angle LCK + \angle MCK$, то искомый угол *ACB* в три раза меньше, чем сумма углов треугольника *ABC*, то есть равен 60°.

Критерии и методика оценивания выполнения олимпиадных заданий

На олимпиаде должна использоваться 7-балльная шкала: каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником.

Основные принципы оценивания приведены в таблице.

Баллы	*Правильность (ошибочность) решения*
7	Полное верное решение.
6 – 7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5 – 6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
2 – 3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0 – 1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов зато, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи.