Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников
2021– 2022 учебный год
Математика
9 класс

Участникам муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников по математике в 2021 – 2022 учебном году предлагается решить **5 задач**.

Задания составлены с учетом школьной программы по принципу «накопленного итога». Они включают как задачи, связанные с теми разделами школьного курса математики, которые изучаются в текущем году, так и задачи по пройденным ранее разделам. Решения задач помимо знания участниками стандартной школьной программы по математике (алгоритмы, теоремы) предполагают владение навыками построения логических конструкций, доказательства цепочек математических утверждений.

Полное верное решение каждой задачи оценивается в **7 баллов**.

Максимальная сумма баллов за решение пяти задач олимпиады составляет **35 баллов**.

Требования к проверке работ:

1) Олимпиада не является контрольной работой и недопустимо снижение оценок по задачам за неаккуратно записанные решения, исправления в работе. В то же время обязательным является снижение оценок за математические, особенно логические ошибки;

2) Стандартная методика оценивания:

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения.**
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

В комментариях к отдельным задачам, в приведенных ответах и решениях к задачам олимпиады, указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Ответы и решения

9.1. Корень из числа 49 можно извлечь по такой «формуле»: $\sqrt{49} = 4 + \sqrt{9}$. Существуют ли другие двузначные числа, квадратные корни из которых извлекаются аналогичным образом и являются целыми? Укажите все такие двузначные числа.

Ответ. Да, существуют: 64 и 81.

Решение. Рассмотрим все двузначные числа, являющиеся квадратами целых чисел. Корни из чисел 16, 25 и 36 не могут быть извлечены указанным способом, так как квадратные корни из их последних цифр не являются целыми. Числа 49, 64 и 81 являются решениями.

Ответ в задаче не изменится, если не требовать, чтобы корень был целым. $\sqrt{10a + b} = a + \sqrt{b}$, $10a + b = a^2 + 2a\sqrt{b} + b$. Так как в левой части равенства стоит целое число, то и число, стоящее в правой части, должно быть целым. Отсюда следует, что b = 0, 1, 4 или 9, то есть $a + \sqrt{b}$ - целое число.

9.2. Все натуральные числа от 1 до 1000 включительно разбиты на две группы: чётные и нечётные. В какой из групп сумма всех цифр, используемых для записи чисел, больше и на сколько?
Ответ. Сумма цифр нечётных чисел больше на 499.
Решение. Сумма цифр числа 1 равна сумме цифр числа 1000; остальные числа разобьём на пары: 2-3, 4-5, 6-7, 8-9, ..., 998-999. В каждой паре единицы нечётного числа больше на 1, чем чётного, а десятков и сотен у них поровну. Всего таких пар 499.

9.3. В произведении трёх натуральных чисел каждый сомножитель уменьшили на 3. Могло ли произведение при этом увеличиться ровно на 2022?
Ответ. Да, могло.
Решение. В качестве примера подходит произведение $1\cdot 1\cdot 678$. После указанной операции получается $(-2)\cdot(-2)\cdot 675 = 2700 = 678 + 2022$.
Замечание. Приведённый пример — единственный. Укажем, как его придумать. Предположим, что два из сомножителей равнялись 1, а третий —a. Их произведение было равно a,
а после уменьшения превратилось в $(-2)^2(a-3) = 4a - 12$. Значит, при $4a - 12 = a + 2022$ условие соблюдается. Решая это уравнение, получаем $a = 678$.
Комментарий. Только верный ответ — 0 баллов.
Предъявлен набор чисел, удовлетворяющий условию —7 баллов.
Во в целом правильном решении из-за арифметической ошибки получен в качестве ответа набор 1, 1, a, где значение a ошибочно — 5 баллов.

9.4. Вместо знаков многоточия вставьте такие числа, чтобы выражение $(x^2 + \ldots\times x + 2) \times (x + 3) = (x + \ldots) \times (x^2 + \ldots\times x + 6)$ стало тождеством.
Ответ. $(x^2+3x+2)(x+3)=(x+1)(x^2+5x+6)$.
Решение. Обозначим неизвестные коэффициенты a, b, c соответственно:
$(x^2+ax+2)(x+3)=(x+b)(x^2+cx+6)$ и приведем к стандартному виду многочлены в левой и правой части: $x^3+(a+3)x^2+(3a+2)x+6=x^3+(b+c)x^2+(bc+6)x+6b$. Данное равенство будет являться тождеством тогда и только тогда, когда одновременно выполняются равенства $6b=6$; $bc+6=3a+2$; $b+c = a+3$. Решая соответствующую систему уравнений, получим, что $b=1$; $a=3$; $c=5$.

9.5. В остроугольном треугольнике ABC проведены медиана AM и высота BH. Перпендикуляр, восстановленный в точке M к прямой AM, пересекает луч HB в точке K. Докажите, что если $\angle MAC = 30^\circ$, то $AK = BC$. (Б. Обухов)
Первое решение. Поскольку $\angle AHK = \angle AMK = 90^\circ$, точки A, H, M и K лежат на окружности ω с диаметром AK (см. рис. 1). По условию, хорда HM этой окружности стягивает угол $\angle MAH = 30^\circ$, поэтому $HM = 2R \sin 30^\circ = AK/2$. С другой стороны, HM — медиана в прямоугольном треугольнике BHC, поэтому $BC = 2HM = AK$, что и требовалось доказать.

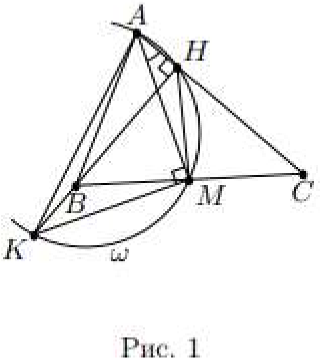

Рис. 1

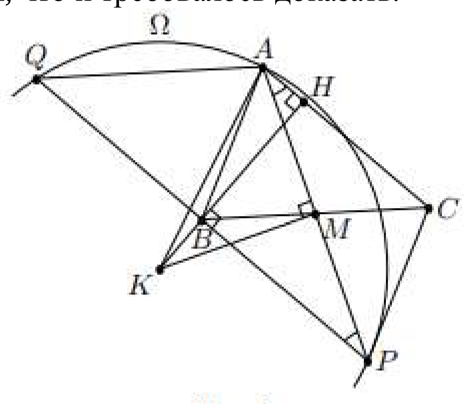

Рис. 2

Второе решение. Достроим треугольник ABC до параллелограммов $ABPC$ и $AQBC$ (см. рис. 2); тогда $BP = AC = BQ$ и $KH \perp PQ$. Кроме того, точка M — середина AP (как точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABPC$). Значит, прямые MK и HK — серединные перпендикуляры к отрезкам AP и PQ. Следовательно, точка K — центр окружности Ω, описанной около треугольника APQ. Далее, $\angle APQ = \angle PAC = 30^\circ$, поэтому хорда AQ окружности Ω равна радиусу AK. Наконец, из параллелограмма $AQBC$ получаем $BC = AQ = AK$.

Комментарий. Замечено, что точки A, H, M и K лежат на одной окружности — 2 балла.

Интернет-ресурсы: http://www.problems.ru, https://olimpiada.ru.