

9 класс

1. Решите уравнение $(x + 2)^4 + x^4 = 112$.

Решение

Введем замену $y = x + 1$, $(y + 1)^4 + (y - 1)^4 = 82$, $y^4 + 6y^2 - 40 = 0$, $y^2 = -10$, $y^2 = 4$, $x_1 = -3$, $x_2 = 1$.

Критерии оценивания

Указан только ответ - 0 баллов.

В процессе решения верно выполнено возведение в четвертую степень, но корни не найдены -1 балл.

В процессе решения верно выполнено возведение в четвертую степень и найден один из корней (любым способом: подбором, разложением на множители и т.д.) - 2 балла.

Верно выполнены все этапы решения уравнения и корни найдены - 7 баллов.

2. Вася утверждает, что количество его друзей, хорошо знающих математику, не меньше 96,8% и не больше 97,6%. Известно, что число Васиных друзей не превосходит 150. Определите наибольшее число в указанных пределах, которое не может быть количеством Васиных друзей.

Решение

Пусть N - количество друзей Васи. Количество x друзей Васи, которые плохо знают математику, находится в диапазоне $0,024N < x < 0,032N$, тогда при $x = 1$, $31\frac{1}{4} < N < 41\frac{2}{3}$; при $x = 2$, $62,3 < N < 83\frac{1}{3}$; при $x = 3$, $93\frac{3}{4} < N < 125$; при $x = 4$, $125 < N < 166\frac{2}{3}$. Таким образом, искомое наибольшее число – 125.

Критерии оценивания

Получен верный ответ с обоснованием - 7 баллов.

При наличии арифметической ошибки - не более 4 баллов.

3. Числа 2^{2021} и 5^{2021} выписаны одно за другим. Сколько всего выписано цифр?

Решение

Пусть в числе 2^{2021} имеется k цифр, а в числе 5^{2021} - m цифр, тогда в искомом числе $k+m$ цифр. $10^{k-1} < 2^{2021} < 10^k$, $10^{m-1} < 5^{2021} < 10^m$, следовательно, $10^{k+m-2} < 10^{2021} < 10^{m+k}$ и $k+m=2022$.

Критерии оценивания

В решении указаны промежуточные оценки, позволяющие выйти на нужную оценку - от 1-3 баллов в зависимости от продвижения в решении.

Получен неверный ответ из-за ошибки в рассуждениях от 1-4 баллов в зависимости от продвижения в решении.

Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки - 5 баллов.

Обоснованно получен верный результат - 7 баллов.

4. Можно ли по окружности расставить $2n$ черных и несколько белых фишек так, чтобы каждой черной фишке соответствовала диаметрально противоположная белая фишка и никакие две белые не стояли рядом?

Решение

Так как каждой черной фишке соответствует диаметрально противоположная белая фишка и никакие две белые не стоят рядом, то фишки должны чередоваться и их поровну. На полуокружности между черной и белой фишкой стоит $2n-1$ фишка, поэтому крайние из них одноцветны, следовательно, расстановка невозможна.

Критерии оценивания

В решении указано чередование фишек - 2 балла.

Верно обоснована невозможность обозначенной в задаче расстановки - 7 баллов.

5. На следствии по делу об украденном пироге Болванщик заявил, что пирог украл Мартовский Заяц. Мартовский Заяц в свою очередь дал показания, что Соня этого не делала. Соня заявила, что пирог украл Болванщик, а Мартовский Заяц этого сделать не мог. Позже выяснилось, что показания ровно одного из них были ложны и хотя бы один из них пирог украл. Можно ли на основе этих данных установить виновного или исключить невиновного? (Утверждение «А и (а) В» ложно тогда и только тогда, когда ложно хотя бы одно из утверждений А или В)

Решение

Если соврал Болванщик, то вместе должны выполняться условия «Мартовский Заяц не крал», «Соня не крала», «Болванщик украл и Мартовский Заяц не крал». Эти условия вместе выполняются. Поэтому Болванщик остается подозреваемым.

Если соврал Мартовский Заяц, то вместе должны выполняться условия «украл Мартовский Заяц», «украла Соня», «Болванщик украл и Мартовский Заяц не крал». Эти условия противоречат друг другу, поэтому Мартовский Заяц не врал. А так как его показания верны, то Соня не воровала пирог.

Если соврала Соня, то по ее показаниям возможны три случая «Болванщик не крал и Мартовский Заяц украл», «Болванщик не крал и Мартовский Заяц не крал», «Болванщик украл и Мартовский Заяц украл». При этом выполняются условия в показаниях остальных последственных: «Мартовский Заяц украл», «Соня не крала». Отсюда делаем вывод, что Мартовский Заяц и Болванщик остаются подозреваемыми, а Соня невиновна.

Таким образом, установить виновного на основе этих данных нельзя, а исключить невиновного можно.

Критерии оценивания

Только верный ответ - 0 баллов.

Верное и полное решение задачи - 7 баллов.

Есть только верное и полное объяснение того, что «Соня невиновна» - 2 балла.

Верный ответ, но полный перебор не сделан - 2 балла.

Верный ответ и сделан полный перебор, но допущена логическая ошибка (например, не указан один из случаев при условии, что соврала Соня) - 4 балла.

Верный ответ и сделан полный перебор, но отсутствует обоснование того или иного вывода (например, в одном из случаев не соотнесены показания всех подозреваемых) - 4 балла.