9 КЛАСС

Максимальное количество 35 баллов

9.1. Существуют ли такие целые числа x, y и z, для которых выполняется равенство: $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 2021$? **(7 баллов)**

Решение:

раскрытия скобок и упрощения получаем многочлен

$-3x^2y + 3xy^2 - 3y^2z + 3yz^2 - 3z^2x + 3zx^2 = 2021$. Левая часть делится на 3, а правая – не делится. Значит, такие числа не существуют.

Ответ: не существует.

Критерии:

1. 7 баллов- полное решение
2. 2 балла – получен вывод о делимости на 3 левой части
3. 1 балл – правильно раскрыты скобки и упрощено выражение
4. 0 баллов – нет продвижения, либо записан ответ без обоснования

9.2. У Ильи есть табличка, заполненная числами от 1 до 9 так, как в таблице слева. За один ход Илья может поменять местами любые две строчки или любые два столбца. Может ли он за несколько ходов получить таблицу справа? **(7 баллов)**

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1	4	7
2	5	8
3	6	9

Решение

Заметим, что как при перемене двух строк местами, так и при перемене двух столбцов местами числа 1 и 2 остаются в одной строке. Во второй таблице это не так, поэтому получить её Илье не удастся.

Замечания

Можно заметить, что при описанных действиях *наборы чисел в строках и столбцах* не меняются, т.е. в какой-то строке всегда в некотором порядке будут числа 1, 2, 3, в другой — 4, 5, 6, в третьей — 7, 8, 9.

Ответ: Нет, не может.

Критерии:

1. 7 баллов - полное верное обоснование
2. 0 баллов – ответ записан без обоснования; неверное решение; решение отсутствует.

9.3. Для положительных чисел x, y и z докажите неравенство $(1+x+2x^2)(2+3y+y^2)(4-11z+8z^2)\geq 7xyz$. **(7 баллов)**

Решение.

Поделим на xyz и перепишем неравенство в равносильном виде $(\frac{1}{x}+1+2x)(\frac{2}{y}+3+y)(\frac{4}{z}-11+8z)\geq 7$. Оценим каждую из скобок по отдельности, применяя неравенство о средних $а+в \geq 2\sqrt{ав}$ к суммам $\frac{1}{x}+2x$;

$\frac{2}{y}+y$; $\frac{4}{z}+8z$. Получим, что

$(\frac{1}{x}+1+2x)(\frac{2}{y}+3+y)(\frac{4}{z}-11+8z)\geq(2\sqrt{2}+1)(2\sqrt{2}+3)(8\sqrt{2}-11) = = (8\sqrt{2}+11)(8\sqrt{2}-11)=128-121=7$.

Критерии оценивания:

1. 7 баллов – верное доказательство

2. 2 балла – незначительное продвижение (неравенство сведено к виду, для которого можно произвести оценку частей выражения; применены методы оценки числового выражения, способствующие продвижению в решении)

3. 4 балла – доказательство выполнено наполовину (применены идеи, использование которых в доказательстве могут привести к верному результату, но доказательство не закончено)

9.4. В левом нижнем углу шахматной доски стоит шашка. Её можно передвигать на одну клетку вверх, либо на одну клетку вправо, либо на одну клетку по диагонали вниз-влево. Можно ли, двигая шашку таким образом, обойти все клетки доски, побывав на каждой из них один раз? **(7 баллов)**

Решение.

Нет. Расставим на доске числа 1, 2, 3 (см. рис.). По условию, шашка из клетки с номером 1 за один ход может попасть только в клетку с номером 2, из клетки 2 — только в клетку 3, а из клетки 3 — только в клетку 1. Значит, если шашка обошла всю доску, начав с клетки 1, то она и закончила на клетке 1, т. е. 22 раза побывала в клетках с номером 1 и по 21 разу — в клетках с номерами 2 и 3. Но клеток с номером 1 на доске всего 21. Противоречие.

2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2

Ответ: нельзя.

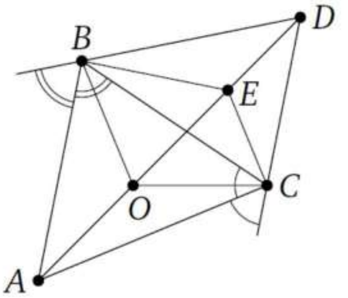
Критерии оценивания:

1. 7 баллов – верный алгоритм доказательства
2. 2 балла – незначительное продвижение (применение метода раскраски)

9.5. Точка D вне остроугольного треугольника ABC такова, что $\angle ABC + \angle ABD = \angle ACB + \angle ACD = 180^{\circ}$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC лежит на отрезке AD. **(7 баллов)**

Решение.

Углы, смежные с углами ABD и ACD, равны соответственно углам ABC и ACB, поэтому CA и BA — биссектрисы внешних углов треугольника BCD (см. рис.). Через точку A их пересечения проходит биссектриса DA угла D треугольника BCD. Биссектрисы углов B и C треугольника BCD перпендикулярны AC и AB; их точка пересечения E лежит на третьей биссектрисе — прямой AD. На AD лежит и точка O — середина общей гипотенузы AE прямоугольных треугольников ABE и ACE. Тогда точки A, B и C лежат на окружности с центром O и радиусом 1/2AE.



Критерии оценивания:

1. 7 баллов – верное доказательство
2. 3 балла – доказано, что DA – биссектриса угла BDC
3. 2 балла – незначительное продвижение (доказано, например, что BA и CA – биссектрисы внешних углов треугольника BCD)