Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
2021-2022 учебный год

9 класс

1. Поздно вечером три волшебника встретились на перекрестке. У каждого в руках была волшебная палочка. Набежал сильный ветер, выхватил у волшебников их палочки, поиграл с ними так, что никто из волшебников не мог отличить свою палочку от чужой. Волшебникам ничего не оставалось сделать как разобрать палочки наугад. Найдите вероятность того, что никто из волшебников не взял свою волшебную палочку.

Решение. У волшебников шесть различных способов взять волшебные палочки. При этом только в двух вариантах из шести никто из волшебников не возьмет свою палочку, поскольку волшебник, который берет палочку первым, может взять любую из двух палочек других волшебников. У оставшихся же волшебников выбора нет, так как палочка одного из них по-прежнему никем не взята, и значит, он обязательно должен взять другую палочку. Таким образом, искомая вероятность равна $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$

2. Дан произвольный треугольник ABC. Докажите, что для этого треугольника выполняется неравенство $BC^3 + AC^3 + 3 \cdot BC \cdot AC \cdot AB > AB^3$.

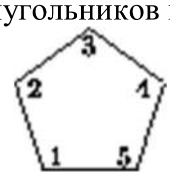
Решение. Обозначим стороны треугольника за a, b, c. Тогда надо доказать неравенство $a^3 + b^3 + 3abc > c^3$. Используя неравенство треугольника $a + b > c$, получаем цепочку неравенств: $a^3 + b^3 + 3abc = (a + b)(a^2 - ab + b^2) + 3abc > c \cdot (a^2 - ab + b^2) + 3abc = c(a^2 - ab + b^2 + 3ab) =$
$= c(a^2 + 2ab + b^2) = c(a + b)^2 > c \cdot c^2 = c^3$.

3. Пантелей и Герасим за ноябрь получили по 20 оценок, причём Пантелей получил пятерок столько же, сколько Герасим четвёрок, четвёрок столько же, сколько Герасим троек, троек столько же, сколько Герасим двоек, и двоек столько же, сколько Герасим – пятёрок. При этом средний балл за ноябрь у них одинаковый. Сколько двоек за ноябрь получил Пантелей?

Решение. Добавим по единице к каждой оценке Герасима. Его сумма баллов увеличится на 20. С другой стороны, она станет больше суммы оценок Пантелея на учетверённое количество Пантелеевых двоек.

Ответ: 5 двоек.

4. Дан набор одинаковых правильных пятиугольников, при вершинах каждого из которых записаны натуральные числа от 1 до 5, как показано на рисунке. Пятиугольники можно поворачивать и переворачивать. Их сложили в стопку (вершина к вершине), и оказалось, что при каждой из пяти вершин суммы чисел одинаковы. Сколько пятиугольников могло быть в этой стопке?



Решение. Сложим в стопку два пятиугольника, перевернув при этом один из них, и совместим их следующими цифрами: 1-5, 2-4, 3-3, 4-2 и 5-1. Тогда мы получим стопку, удовлетворяющую условию. Назовём её «двойкой». Сложим в стопку пять пятиугольников, повернув их по отношению друг к другу так, чтобы совместились цифры 1-2-3-4-5, 2-3-4-5-1 и так далее. Тогда мы получим стопку, также удовлетворяющую условию. Назовём ее «пятёркой». Любое чётное количество пятиугольников в стопке можно получить, последовательно складывая «двойки». Любое нечётное количество пятиугольников, большее 3, можно получить из одной «пятёрки» и нужного количества «двоек». Заметим, что стопка из одного пятиугольника условию не удовлетворяет. Докажем, что нельзя составить стопку, удовлетворяющую условию, из трёх пятиугольников. В каждом пятиугольнике цифры, записанные при соседних вершинах, различаются либо на 1, либо на 4. Предположим, что в стопке из трёх пятиугольников суммы чисел, записанных при двух соседних вершинах, оказались равными, то есть $x_1 + x_2 + x_3 = (x_1 \pm a_1) + (x_2 \pm a_2) + (x_3 \pm a_3)$, где слева записана сумма чисел при одной из вершин, а справа – сумма чисел при соседней вершине (a_i может равняться только 1 или 4). Перебором убеждаемся в том, что это равенство верным быть не может (перебор можно сократить, используя идею чётности).

Ответ: любое натуральное число, кроме 1 и 3.

5. Каждой паре чисел A и B поставлено в соответствие некоторое число $A * B$. Найдите $2021 * 1999$, если известно, что для любых трёх чисел A, B, C выполнены тождества: $A * A = 0$ и $A * (B * C) = (A * B) + C$.

Решение.

$A * (A * A) = A * 0 = A * (B * B) = A * B + B$,

$A * (A * A) = (A * A) + A = 0 + A = A$, тогда $A * B + B = A$.

Следовательно, $A * B = A - B$. Поэтому $2021 * 1999 = 2021 - 1999 = 22$.

Ответ: 22.