Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

2021-2022 уч.год

9 класс

Решения и ответы

1. Ольга проехала из города на дачу на такси с пересадкой в поселке. Из города до поселка она ехала на "Такси-А", и заплатила за поездку из расчета 6 руб за км. Из поселка до дачи она ехала на "Такси-Б" и заплатила за поездку из расчета 4 руб за км. На следующий день Ольга ехала обратно, и обе фирмы такси поменяли тариф – "Такси-А" за поездку от поселка до города взяло по 3 руб за км, "Такси-Б" взяло за поездку от дачи до поселка по 10 руб за км. Ольга насчитала, что на второй день она заплатила ровно на 100 руб меньше. Могло ли так быть? Оплата поездок в такси производилась за целое число километров, время на посадку и высадку Ольга не оплачивала.

   Решение. Нет, не могло. Разность стоимостей поездки в разные дни на "Такси-А" 3 руб за км, на "Такси-Б" – 6 руб за км. Обе разницы делятся на 3, поэтому, независимо от длины маршрута, изменение стоимости должно быть числом, которое делится на 3. Поэтому заплатить на 100 руб меньше не получится.

   Ответ. Так быть не могло, заплатить ровно на 100 руб меньше невозможно.

2. Докажите неравенство для любых вещественных a, b

$$a^2 + 4b^2 + 4b - 4a + 5 \geq 0$$

   При каких a, b выполняется равенство?

   Решение.

$$a^2 + 4b^2 + 4b - 4a + 5 \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$a^2 - 4a + 4 + 4b^2 + 4b + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$(a-2)^2 + (2b+1)^2 \geq 0$$

   Последнее неравенство получается как сумма двух верных неравенств $(a-2)^2 \geq 0$, $(2b+1)^2 \geq 0$.

   Равенство достигается при $a = 2$, $b = -\dfrac{1}{2}$, это следует из условия равенства нулю квадратов в последних двух неравенствах.

3. На окружности отметили 2021 точку и соединили эти точки отрезками так, что получился выпуклый вписанный 2021-угольник, разрезанный диагоналями на треугольники. При этом никакие две диагонали не пересеклись во внутренних точках (*общими точками различных диагоналей являются только вершины*). Докажите, что среди полученных треугольников не может быть больше одного остроугольного.

   Решение. Нам дан вписанный многоугольник, разделенный на треугольники. Все полученные треугольники являются вписанными в одну окружность. Центр окружности может лежать внутри только одного треугольника, или оказаться на диагонали, или лежать вне многоугольника. Как известно, треугольник является остроугольным тогда и только тогда, когда центр описанной окружности находится внутри этого треугольника. Поэтому разделение вписанного многоугольника на треугольники непересекающимися диагоналями может содержать не более одного остроугольного треугольника.

4. Дана равнобедренная трапеция. Проведены две окружности: первая окружность касается боковых сторон в вершинах одного основания трапеции, вторая окружность касается боковых сторон в вершинах другого основания трапеции. Диагональ трапеции пересекается с каждой из окружностей, соответственно, получаются две хорды. Докажите, что эти хорды равны.

   Решение. Возможно два варианта расположения окружностей. Первый вариант. Пусть первая окружность отсекает от диагонали BD хорду BK, вторая окружность отсекает от диагонали BD хорду MD. Хорды BK и MD не пересекаются. Требуется доказать, что $BK = MD$. Пусть $BK = x, KM = y, MD = z$. Воспользуемся теоремой о касательной и секущей два раза.

   Из точки B ко второй окружности: $BA^2 = BM \cdot BD = (x + y)(x + y + z)$.

   Из точки D к первой окружности: $DC^2 = DK \cdot DB = (z + y)(x + y + z)$.

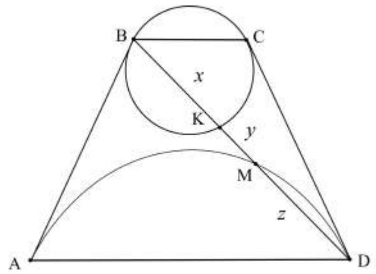
   Так как трапеция равнобедренная, то $BA = DC$. Можно приравнять правые части равенств: $(x + y)(x + y + z) = (z + y)(x + y + z)$. Отсюда $x = z$, что требовалось.

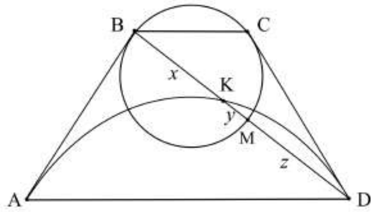
   Второй вариант расположения. Пусть первая окружность отсекает от диагонали BD хорду BM, вторая окружность отсекает от диагонали BD хорду KD. Хорды BM и KD пересекаются по отрезку KM. Требуется доказать, что $BM = KD$. Пусть $BK = x, KM = y, MD = z$. Воспользуемся теоремой о касательной и секущей два раза.

   Из точки B ко второй окружности: $BA^2 = BK \cdot BD = x(x + y + z)$.

   Из точки D к первой окружности: $DC^2 = DM \cdot DB = z(x + y + z)$.

   Приравниваем правые части, получаем $x(x+y+z) = z(x+y+z)$. В этом случае тоже получаем $x = z$. $BM = x + y, KD = z + y, BM = KD$.





5. Уравнение $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, где p, q, r – целые, имеет три различных целых корня x_1, x_2, x_3. Докажите, что числа q и r не имеют общих делителей тогда и только тогда, когда числа в каждой из пар (x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_1) не имеют общих делителей.

   Решение. Так как уравнение имеет три различных корня x_1, x_2, x_3, то левая часть может быть разложена на множители

$$x^3 + px^2 + qx + r = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

   Раскроем скобки справа

$$x^3 + px^2 + qx + r = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3$$

   Получаем $q = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1,\ r = -x_1x_2x_3$.

   Перейдем к доказательству. Пусть корни попарно не имеют общих делителей. Пусть простое число k является делителем первого корня x_1. Тогда k является делителем r. Так как r является произведением трех корней, то любой его делитель является делителем какого-то из множителей, т.е. делителем какого-то корня. Из того, что корни не имеют общих делителей, следует, что любой делитель k является делителем ровно одного корня. Корень x_1 входит в два слагаемых, составляющих q, и не входит в слагаемое x_2x_3. Поэтому k не является делителем q, и числа q и r не имеют общих делителей.

Докажем утверждение в обратную сторону. Пусть q и r не имеют общих делителей. Пусть простое число k является делителем r. Тогда это число или является делителем одного корня, например, x_1, или двух корней, например, x_1 и x_2. Но если k является делителем двух корней, то q делится на k, а это противоречит тому, что q и r не имеют общих делителей. Значит, каждый простой делитель числа r является делителем только одного корня, и корни не имеют общих делителей.

Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

2021-2022 уч.год

9 класс

Критерии проверки

Задача 1

Балл	За что ставится
7	Полностью верное решение.
3	Замечено, что все стоимости поездок изменились на число, кратное 3. Дальнейшее продвижение неверно или отсутствует.
1	Приводится правильный ответ без обоснования, или обоснование ошибочно.
0	Неверное решение и (или) неверный ответ.

Задача 2

Балл	За что ставится
7	Полностью верное решение. Неравенство доказано, найдены значения переменных, при которых неравенство обращается в равенство. (Доказательство того факта, что сумма двух квадаратов неотрицательна, не требуется.)
5	Неравенство доказано. Значения переменных, при которых неравенство обращается в равенство, не найдены.
1	Выделен один квадрат разности. Дальнейшее продвижение отсутствует или неверно.
0	Неверное решение.

Задача 3

Балл	За что ставится
7	Полностью верное решение.
5	Верное решение, недостаточно обоснованное.
1	Указано, что многоугольник разбит на треугольники, вписанные в одну окружность. Дальнейшее продвижение отсутствует или неверно.
0	Неверное решение.

Задача 4

Балл	За что ставится
7	Полностью верное решение.
5	Верное решение. Рассмотрен один из двух возможных случаев расположения хорд на диагонали трапеции.
1	Ошибка в применении теоремы о касательной и секущей.
0	Неверное решение.

Задача 5

Балл	За что ставится
7	Полностью верное решение.
5	Верное решение, в котором доказательство проведено в одну сторону, равносильность двух утверждений не доказана.
3	В целом верное доказательство, недостаточно обоснованное, содержащее нестрогие (недоказанные) рассуждения.
1	Приведено разложение на множители. Показана связь коэффициентов и корней. Дальнейшее продвижение отсутствует или неверно.
0	Неверное решение.