ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2021/22 гг.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
МАТЕМАТИКА
9 КЛАСС

Задания для обучающихся

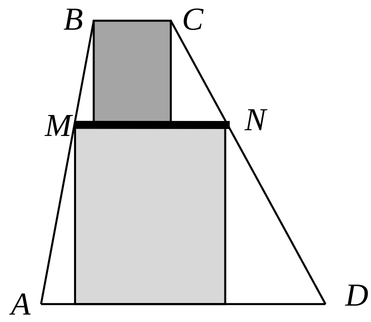
Время выполнения – 235 минут
Максимальное количество баллов – 42

Написать только ответ — мало!
Все ответы нужно объяснить с помощью рассуждений или вычислений!

1. Даны две обыкновенные дроби с положительными числителями и знаменателями. У первой дроби числитель на 5 меньше знаменателя, у второй дроби числитель на 2021 меньше знаменателя. Может ли у их суммы числитель быть больше знаменателя? Обоснуйте свой ответ.

2. В трёх сосудах налито зелье. Известно, что в каждом сосуде целое число литров, отличное от нуля. После того, как из первого сосуда отлили 10% имевшегося в нём зелья, из второго – 20%, а из третьего – 30%, общее количество зелья уменьшилось на 25%. Докажите, что в третьем сосуде было не менее 4 литров зелья.

3. Отрезок MN разделил трапецию $ABCD$ на две трапеции так, что $\frac{MB}{AM}=\frac{BC}{MN}=\frac{CN}{ND}=\frac{MN}{AD}$. Известно, что площади закрашенных прямоугольников равны 1 и 4 соответственно. Найдите площадь трапеции $ABCD$.



4. У Маши было несколько синих и несколько зелёных карточек. Всего 100 штук. На первой она написала 1, на второй – 2, на третьей – 3, ..., на 100-й – 100. Перебирая карточки, Маша заметила, что если сложить два числа, записанных на карточках разного цвета, и результат не превосходит 100, то он записан на синей карточке. А если перемножить два числа, записанных на карточках разного цвета, то результат записан на зелёной. Число 6 записано на зелёной карточке. На карточке какого цвета записано число 30?

5. Дан прямоугольный треугольник ABC, CD – его высота, опущенная на гипотенузу AB. Точки K и L выбраны на гипотенузе так, что CK – биссектриса угла ACD, CL – биссектриса угла BCD. Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник ABC, совпадает с центром окружности, описанной около треугольника KCL.

6. В натуральном ряду выбрали 2021 последовательное число так, что среди выбранных чисел имеется ровно 30 точных квадратов. Сколькими способами это можно сделать?

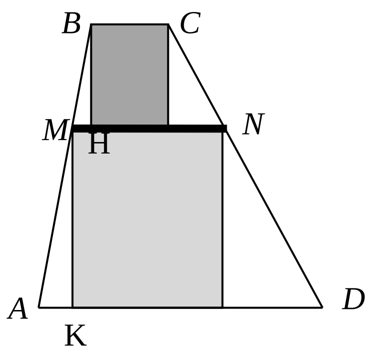
Решения и критерии проверки

1. Ответ. Да, может. **Решение**. Запишем первую дробь в виде $\frac{x}{x+5}$, а вторую – $\frac{y}{y+2021}$. Найдем сумму этих дробей $\frac{x}{x+5}+\frac{y}{y+2021}=\frac{x(y+2021)+y(x+5)}{(x+5)(y+2021)}=$ $=\frac{(xy+2021x+5y)+xy}{(xy+5y+2021x)+5\cdot 2021}$. Чтобы числитель был больше знаменателя достаточно, чтобы $xy>5\cdot 2021=10105$. Годится, например, такая пара: $x=110, y=100$.

Критерии проверки. Приведен пример двух дробей, удовлетворяющих условию задачи, для которых обосновано, в явном виде или алгебраически, что числитель суммы этих дробей больше знаменателя – **7 баллов**. Верный пример без обоснования – **5 баллов.** В остальных случаях – **0 баллов.**

2. Решение. Пусть a,b,c(л) - количество зелья в 1, 2 и 3 сосудах соответственно. Тогда по условию $0,9a+0,8b+0,7c=\frac{3}{4}(a+b+c)$, тогда $3,6a+3,2b+2,8c=3a+3b+3c$, т.е. $0,6a+0,2b=0,2c\Rightarrow c=3a+b$. Так как все переменные целые и отличны от нуля, то $a\geq 1, b\geq 1$, значит $c\geq 4$. **Критерии проверки.** Верное решение – **7 баллов.** По условию задачи составлено верное уравнение, но дальнейших продвижений нет или они содержат ошибку – **2 балла.** В остальных случаях – **0 баллов.**

3. Ответ. $S_{ABCD}=7,5$.



Решение. Пусть $k=\frac{MB}{AM}=\frac{BC}{MN}=\frac{CN}{ND}=\frac{MN}{AD}$. Прямоугольные треугольники MBH и AMK подобны, причём их коэффициент подобия $\frac{MB}{AM}=\frac{BH}{MK}=k$. Отношение площадей закрашенных прямоугольников равно $\frac{BH\cdot BC}{MK\cdot MN}=k^2=\frac{1}{4}$, следовательно, $k=\frac{1}{2}$. Пусть $BH=h$, $BC=x$, тогда $MN=2x$, $AD=4x$, $MK=2h$. По условию площадь малого прямоугольника равна $x\cdot h=1$.

$$S_{ABCD}=\frac{BC+AD}{2}\cdot(BH+MK)=\frac{x+4x}{2}(h+2h)=7,5xh=7,5.$$

Критерии проверки. Верное решение – **7 баллов.** Ход рассуждений верный, все шаги обоснованы, но решение содержит вычислительную ошибку ИЛИ с помощью верных рассуждений получен правильный ответ, но не все шаги обоснованы – до **5 баллов**. В остальных случаях – **0 баллов.**

4. **Ответ.** На зелёной. **Решение.** Покажем, что число 1 записано на синей карточке. Предположим, что это не так. По условию хотя бы одна синяя карточка точно есть. Пусть на ней записано число А, отличное от 1. Так как А=1×А и А и 1 написаны на карточках разных цветов, А должно быть записано на зелёной карточке. Получили противоречие. Значит, 1 – на синей карточке.

Теперь покажем, что число 5 записано на синей карточке. Действительно, если бы число 5 было записано на зелёной карточке, то поскольку 6=1+5, число 6 было бы записано на синей карточке, а это не так. Следовательно, 5 – на синей карточке. Получаем, что 30=5×6 как произведение чисел разных цветов записано на зелёной карточке.

Критерии проверки. Приведены верные рассуждения, получен правильный ответ – **7 баллов**, доказано только, что 1 – на синей карточке – **2 балла**, доказано, что число 5 на синей карточке – **5 баллов**. В остальных случаях – **0 баллов**.

5. **Решение.** Пусть в треугольнике ABC $\angle A=\alpha$, тогда $\angle B=90°-\alpha$, значит в прямоугольном треугольнике BCD $\angle BCD=\alpha$, а его половина $\angle LCB=\frac{\alpha}{2}$. Рассмотрим треугольник ACL: $\angle ACL=90°-\angle LCB=90°-0{,}5\alpha$, $\angle A=\alpha$, значит по сумме углов треугольника $\angle ALC=90°-0{,}5\alpha$. Тогда треугольник ACL – равнобедренный, т.е. биссектриса угла A совпадает с серединным перпендикуляром к отрезку CL. Аналогично докажем, что треугольник BCK также равнобедренный, т.е. биссектриса угла B совпадает с серединным перпендикуляром к отрезку CK. Но центр вписанной окружности треугольника ABC является пересечением биссектрис углов A и B, а центр описанной окружности треугольника KCL –это точка пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам CK и CL. Значит, центры совпадают. **Критерии проверки.** Верное решение – **7 баллов.** В остальных случаях – **0 баллов.**

6. **Ответ.** 57 способами. **Решение.** Заметим, что если взять числа от 1 до 2021, то среди них содержится 44 точных квадрата, т.к. $45^2=2025$. Разность между соседними точными квадратами равна $(n+1)^2-n^2=2n+1$, т.е. постоянно увеличивается. Значит, двигая вдоль натурального ряда «поезд» из 2021 последовательного числа, мы сможем уменьшить количество точных квадратов в «поезде» до 30. Поймем, когда это произойдет. Пусть k^2 – наименьший точный

квадрат, включенный в «поезд», тогда ряд натуральных чисел выглядит так: $1,2,\ldots,k^2-1,\underbrace{k^2,k^2+1,\ldots,(k+29)^2,\ldots,}_{2021}(k+30)^2,\ldots$ Чтобы условие выполнялось, необходимо, чтобы $(k+29)^2 \le k^2-1+2021<(k+30)^2$. Решая эту систему, получаем, что $k=19$ или $k=20$ (нас интересую только натуральные числа).
Если $k=19$, то
$(k-1)^2=18^2=324, k^2=19^2=361,\ldots,(k+29)^2=48^2=2304,(k+30)^2=49^2=2401$.
Таким образом ряд из 2021 числа: 361, 362, …, 2304+77=2381 удовлетворяет условию. Но если «поезд» сдвинуть к началу натурального ряда так, чтобы первым числом в ряду было 325, 326,…, 360, этот «поезд» также будет содержать точные квадраты от 19^2 до 48^2. Итого 37 вариантов.
Если $k=20$, то
$(k-1)^2=19^2=361, k^2=20^2=400,\ldots,(k+29)^2=49^2=2401,(k+30)^2=50^2=2500$.
Таким образом ряд из 2021 числа: 400, 401, …, 2401+19=2420 удовлетворяет условию. Но если «поезд» сдвинуть к началу натурального ряда так, чтобы первым числом в ряду было 381,…, 399, этот «поезд» также будет содержать точные квадраты от 20^2 до 49^2. Итого ещё 20 вариантов.
Критерии проверки. Описаны все варианты, показано, что других быть не может – **7 баллов**. Ход решения верный, верно указаны все точные квадраты, которые могут входить в выбранные числа, но получен ответ, отличающийся от правильного не более чем на 2 – **5 баллов.** Подбором найдены точные квадраты, которые могут входить в выбранные 2021 число, с их помощью получен верный ответ – **до 3 баллов.** Получена только часть вариантов, соответствующая одному набору точных квадратов – **2 балла.** В остальных случаях – **0 баллов.**