Ответы. 9 класс.

9.1. Ответ: 13122.

Решение.

Для того, чтобы число делилось на 45, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 5 и на 9. Для того, чтобы выполнялась делимость на 5, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 0 или 5. (2 способа).

Теперь на оставшиеся пять мест нужно расставить цифры так, чтобы получившееся число делилось на 9. Для этого выберем четыре цифры произвольным образом (это можно сделать $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$ способами), а пятую цифру подберем так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 9. Поскольку все возможные остатки от деления на 9 (0, 1, 2, …, 8), и при этом каждый остаток встречается ровно 1 раз, то последнюю цифру можно выбрать одним способом (например, если сумма всех цифр, кроме последней равна 50, то в качестве последней цифры выбираем 4, чтобы итоговая сумма цифр делилась на 9).

Применяя правило произведения, получаем, что всего $2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 1 = 13122$ способа.

9.2.

Решение 1.

1. Перенесем все в правую часть

$(x + c)(x + d) – (2x + c + d) = 0$,

$x^2 + cx + dx + cd – 2x – c – d = 0$,

$x^2 + (c + d – 2)x + cd – c - d = 0$.

Находим дискриминант квадратного уравнения

$D = (c + d – 2)^2 - 4(cd – c – d) = c^2 + d^2 + 4 + 2cd – 4c – 4d - 4cd + 4c + 4d =$

$= c^2 + d^2 - 2cd + 4 = (c – d)^2 + 4 > 0$ Значит, уравнение имеет два различных корня.

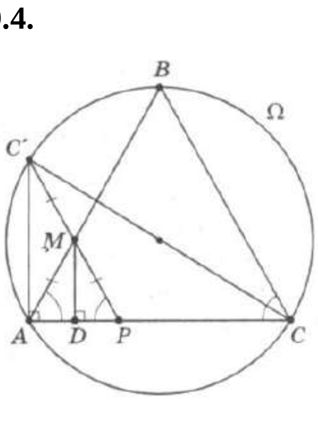
Решение 2. Рассмотрим $f(x) = (x + c)(x + d) – (2x + c + d)$, тогда уравнение из условия примет вид $f(x) = 0$. Заметим, что $f(– c) = c – d$ и $f(– d) = d – c$. Так как $c \neq d$, в одной из этих точек значение этого приведенного трехчлена отрицательно. Значит, у квадратного трехчлена есть ровно два корня.

Замечание. В первом решении не используется условие $c \neq d$.

9.3. Ответ. Не сможет.

Решение. Пусть длина первого прыжка паука-скакуна равна d, и после n прыжков он вернулся в начальную точку. Тогда его путь – замкнутая ломаная $A_1A_2A_3\ldots A_nA_1$ со звеньями длины $d, 2d, 4d, \ldots 2^{n-1}d$. Такая ломаная не существует, так как длина одного её звена больше суммы длин других звеньев: $2^{n-1}d > d + 2d + \ldots + 2^{n-2}d$ (поскольку $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{n-2} < 2 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{n-2} = 4 + 4 + 8 + \ldots + 2^{n-2} = \ldots = 2^{n-1}$, что противоречит.

9.4.



Решение.

Так как CC' - диаметр окружности, то $\angle C'AC = 90^0$.

Поскольку $MP \parallel BC$, получаем, что $\angle MPA = \angle BCA = \angle BAC$. Значит, треугольник AMP – равнобедренный и поэтому его высота MD является и медианой. Так как $AD = DP$ и $AC' \parallel DM$, по теореме Фалеса получаем, что $C'M = MP$.

<u>Замечание</u>. Есть и другие решения, например, с использованием подсчета углов в прямоугольном треугольнике PAC'; именно, $\angle MAC' = 90^0 - \angle MAP = 90^0 - \angle ACB = 90^0 - \angle MPA = \angle MC'A$, откуда $MP = MA = MC'$.

9.5. Ответ: Первый.

Решение. Выигрывает тот, после чьего хода в коробках не осталось карточек. Опишем выигрышную стратегию первого игрока. Первым ходом он берет из второй коробки 2 карточки, а дальше добивается того, чтобы после каждого его хода разность количества карточек в коробках делилась на 3. Тогда после каждого хода второго разность количества карточек в коробках не будет делиться на 3 (в частности, число карточек в коробках будет разным), поскольку она будет меняться на 1 или на 2.

Покажем, как первому добиться того, чтобы после каждого его хода разность количества карточек в коробках, делилась на 3. После первого его хода разность равна $98 - 20 = 78$. Пусть после второго хода в коробках осталось a и b карточек ($a > b$, $a - b = 3k + d$, $d = 1$ или $d = 2$). Тогда первому достаточно взять d карточек из коробки с a карточками. А так как суммарное число карточек в коробках после каждого хода уменьшается, то после какого-то хода первого в обеих коробках не останется карточек и он выиграет.