9 класс

1. Есть лампочка и 10 пронумерованных кнопок. Известно, что ровно 5 из них действующие. За одну попытку разрешается нажать одновременно три любые кнопки. Если среди них есть хотя бы одна действующая – лампочка загорается. Как при помощи не более 9 попыток выяснить, является ли кнопка с номером 1 действующей? (При отпускании нажатых кнопок по завершении каждой попытки лампочка всегда гаснет).

   Решение. Разобьём кнопки с номерами со второго по девятый на три группы по три кнопки, например, (2, 3, 4), (5, 6, 7), (8, 9, 10). Потратим на каждую группу по три попытки, каждая попытка состоит из нажатия кнопки 1 и двух кнопок одной группы (в каждую попытку пара отличается). Если хотя бы один раз лампочка не загорится, ясно, что кнопка 1 неисправна. Пусть лампочка загорелась все 9 раз. Так как среди кнопок 2 – 9 не более 5 исправных, хотя бы в одной из групп есть 2 неисправные кнопки (принцип Дирихле). Поскольку лампочка загорелась при нажатии на эту пару неисправных кнопок и кнопку 1, кнопка 1 исправна.

2. Найдите значение дроби
$$\frac{2\cdot 2020}{1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\ldots+\frac{1}{1+2+3+\ldots+2020}}.$$

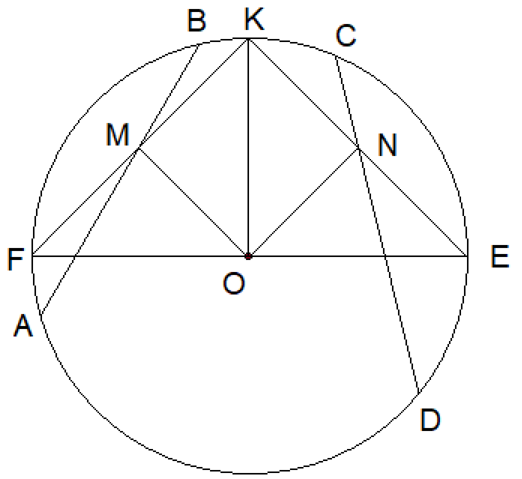
   Решение. Обозначим знаменатель дроби через q. Применяя многократно формулу суммы арифметической прогрессии получим, что
$$q=\frac{2}{1\cdot 2}+\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{2}{2020\cdot 2021}.$$
   Теперь воспользуемся равенством $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$, получим
$$q=\frac{2}{1}-\frac{2}{2}+\frac{2}{2}-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{2}{4}+\frac{2}{4}-\ldots+\frac{2}{2020}-\frac{2}{2021}=\frac{2\cdot 2020}{2021}.$$
   Подставив это выражение в исходную дробь и сократив её, получим ответ: 2021.

3. Жилище крота представляет собой линию из 100 куч (выходов на поверхность), соседние кучи соединены подземными переходами (1–2–3–...–99–100). Лиса хочет поймать крота. В начальный момент времени крот находится у некоторого выхода. Каждую минуту крот перемещается к одной из соседних куч, а лиса подходит к любой произвольной куче (не обязательно к другой). Если крот и лиса оказываются около одной кучи, то лиса ловит крота. В остальных случаях лиса не может наблюдать его положение и перемещения. Есть ли у лисы стратегия, позволяющая гарантированно поймать крота?

   Решение. Покажем, что лиса сможет поймать крота. Приведём пример стратегии, при которой ей будет достаточно достаточно 200 попыток. Сначала предположим, что в начальный момент крот находится около кучи с нечётным номером. Тогда после двух подходов к куче 1 либо крот будет пойман, либо окажется у одной из куч с нечётным номером $\geqslant 3$. Затем лиса два раза подходит к куче номер 3. После этого аналогично либо крот пойман, либо находится в куче с номером $\geqslant 5$. Продолжая так последовательно делать по 2 подхода к кучам с нечётными номерами 99, лиса гарантированно поймает крота, если изначально он находился около кучи с нечётным номером. К этому моменту сделано чётное число попыток, поэтому крот находится около выхода с той же чётностью, что и в начале. Теперь лиса может аналогично последовательно делать по 2 подхода к кучам с чётными номерами, например, 100, 98, ..., 2 и гарантированно поймать крота.

4. В окружности расположен квадрат $OMKN$ так, что вершина O совпадает с центром окружности, вершина K лежит на окружности. Хорда AB окружности проходит через вершину M, хорда CD – через вершину N. Докажите, что $AM \cdot MB = CN \cdot ND$.

   Решение. Пусть сторона квадрата равна a. Продолжим сторону KM квадрата до пересечения с окружностью в точке F, проведем радиус OF. Получим равнобедренный треугольник KOM, в котором OM – высота, значит, $FM = MK = a$. Хорды AB и KF пересекаются в одной точке, тогда $AM \cdot MB = FM \cdot MK = a^2$. Если продолжить сторону KN квадрата и получить хорду KE, то аналогично показывается, что $CN \cdot ND = KN \cdot NE = a^2$. Из последних равенств следует, что $AM \cdot MB = CN \cdot ND$.



5. Все натуральные числа раскрасили в два цвета. Докажите, что среди них можно так выбрать числа A, B и C одного цвета, что $A : C = C : B$.

   Решение. Рассмотрим только степени двойки 2^n, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $A = 2^a$, $B = 2^b$ и $C = 2^c$. Тогда требуемое равенство сводится к условию $a - c = c - b$. Если числа рассматриваемого вида раскрашены так, что среди них нет двух последовательных, окрашенных одинаково, то все числа вида 2^{2n} одного цвета и можно положить $a = 2$, $b = 6$, $c = 4$. Если среди рассматриваемых чисел есть три последовательных одной окраски, то положим C равным среднему из них (а A и B двум другим). Пусть ни той, ни другой ситуации нет. Найдутся числа 2^n и 2^{n+1} (можно считать, что $n > 3$), которые окрашены одинаково, скажем, в зелёный цвет. Тогда числа 2^{n-1} и 2^{n+2} другого цвета (пусть, красного). Если число 2^{n+5} – красное, то $a = n-1$, $b = n+5$ и $c = n+2$. Пусть 2^{n+5} – зелёное. Если 2^{n+3} тоже зелёное, то $a = n+1$, $b = n+5$ и $c = n+3$. Пусть 2^{n+3} – красное. Тогда 2^{n+4} – зелёное (иначе числа 2^{n+2}, 2^{n+3} и 2^{n+4} одноцветные вопреки сделанному предположению). По той же причине число 2^{n+6} – красное. Рассмотрим число 2^{n+7}. Если оно зелёное, то $a = n+7$, $b = n-1$, $c = n+3$. Если красное, то $a = n+7$, $b = n-1$, $c = n+2$. Во всех случаях искомая тройка чисел найдена.