Решения задач 9 класса (1-й вариант).

1. Даны положительные числа $x > y$. Пусть $z = \frac{x+y}{2}$ и $t = \sqrt{xy}$. Оказалось, что $(x-y) = 3(z-t)$. Найдите x/y.

Ответ: 25 (во втором варианте 9). Заметим, что $z - t = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2/2$. *Обозначив,* $a = \sqrt{x}$, $b = \sqrt{y}$, *получим, что* $a^2 - b^2 = 3(a-b)^2/2$, *что преобразуется к* $(a-b)(2a+2b-3a+3b) = (a-b)(5b-a) = 0$. *По условию* $a \neq b$, *поэтому* $a = 5b$, *т.е.* $x/y = 25$.

2. В олимпиаде участвуют школьники с 6 по 11 класс. Председатель жюри знает, что придёт ровно 1000 школьников, но не знает их распределения по классам. У него есть ровно 500 листов бумаги. На одном листе печатаются два экземпляра условий (слева одно, справа другое); можно печатать условия разных классов, а можно одного и того же.

При помощи одной команды для принтера можно распечатать любое количество *одинаковых* листов. Например, можно скомандовать принтеру: напечатать 142 листа вида «7 класс + 10 класс». Председатель уверен, что когда он узнает распределение участников по классам, ему хватит 6 команд для принтера, чтобы напечатать все 1000 нужных условий. Прав ли он?

Ответ: он прав. Не умаляя общности, можно считать, количества участвующих по классам упорядочено по возрастанию так: 6, 7, 8, 9, 10, 11. Первой командой напечатаем все условия 6-го класса, и столько же 7-го. Второй — все оставшиеся условия 7-го класса и столько же 8-го, и т.д. Пятой командой напечатаем все оставшиеся условия 10 класса и столько же 11-го. Ясно, что после этого останется четное число участников 11 класса, и мы шестой командой сможем их напечатать.

3. Саша записывает 30 различных натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{30}$. Оля вычисляет НОД или НОК чисел a_1 и a_2, потом НОД или НОК полученного результата и числа a_3 и т. д., в конце она вычисляет НОД или НОК предыдущего результата и числа a_{30}. При этом из всех 29 операций она должна вычислить НОК ровно 2 раза. Может ли Саша записать такие числа, что при любых действиях Оли итоговый результат будет равен 300?

Ответ: нет, не может. Предположим, одно из двух последних Сашиных чисел больше 300. *Тогда Оля может вычислить НОК на двух последних шагах, и результат окажется больше* 300. *Теперь пусть одно из двух последних чисел меньше* 300. *Тогда Оля может вычислить на двух последних шагах НОД, и результат будет заведомо меньше* 300. *Остался случай, когда они оба равны* 300, *что невозможно по условию.*

4. В правильном 20-угольнике отмечены четыре последовательные вершины A, B, C и D. Внутри него выбрана точка E так, что $AE = DE$ и $\angle BEC = 2\angle CED$. Найдите угол AEB.

Ответ: 39° *(во 2-м варианте:* 36°*).*

Заметим, что $ABCD$ *— равнобедренная трапеция с углами* $\angle ABC = \angle DBC = 180^\circ \cdot 18/20 = 162^\circ$. *Точка* E *лежит на серединном перпендикуляре к основанию* AC, *а следовательно, треугольник* BEC *равнобедренный. Проведем в нем высоту* EH, *а из точки* C *опустим перпендикуляр* CK *на прямую* ED. *Имеем:* $\angle CEH = \angle BEC/2 = \angle CED$. *Поэтому прямоугольные треугольники* CEH *и* CEK *равны по острому углу и гипотенузе. В частности,* $CK = CH = DC/2 = CD/2$, *поэтому в прямоугольном треугольнике* CKD *угол* KDC *равен* 30°. *В четырехугольнике* $CDEH$ *три угла равны* 30°, 162° *и* 90°, *поэтому последний его угол* HED *равен* 78°. *Наконец,* $\angle CEK = \angle HED/2 = 39^\circ$, *и* $\angle AEB$ *равен тому же.*

5. Фирма специализируется на изготовлении «досок с дыркой»: это клетчатая доска 300×300, в которой вырезана по клеточкам дырка в виде прямоугольника, не выходящего на границу доски. К каждой такой доске прикреплена бирка с указанием максимального количества не бьющих друг друга ладей, которое можно расставить на этой доске. (Считается, что ладьи не бьют сквозь дырку.) К юбилею фирмы было решено изготовить доску с самым большим числом на бирке. Чему равно это число?

Ответ: 400 *ладей (во 2-м варианте* 440 *ладей).*

Пусть дырка имеет размеры $a \times b$. *Заметим, что все клетки доски с дыркой покрываются* $300 - b$ *столбцами и* $300 - a$ *строками. Если* $a, b \geqslant 100$, *то все клетки покрываются не более чем* 400 *линиями, и на них не удастся поставить более* 400 *ладей. Если же одна из сторон (например, а) меньше* 100, *то доска покрывается* $300 - a$ *строками и* $2a$ *кусочками строк, и на них поместится не более* $300 + a \leqslant 400$ *ладей.*

Если же вырезать дырку 100×100 *равно в центре доски, то можно расставить ладьи в клетках с координатами* $(1, 200)$, $(2, 199)$, $\ldots$, $(100, 101)$, $(101, 100)$, $\ldots$, $(200, 1)$ *и* $(101, 300)$, $(102, 299)$, $\ldots$, $(200, 201)$, $(201, 200)$, $\ldots$, $(300, 101)$.