Муниципальный этап
Всероссийской олимпиады школьников
по математике
в 2021 – 2022 учебном году

Ответы и решения

Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серъёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

4) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

5) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

6) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказательств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

7) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставляемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а

жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено. Финальная оценка является целым числом от 0 до 7.

8) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2021 – 2022 учебном году
9 класс

Время выполнения заданий — 4 часа

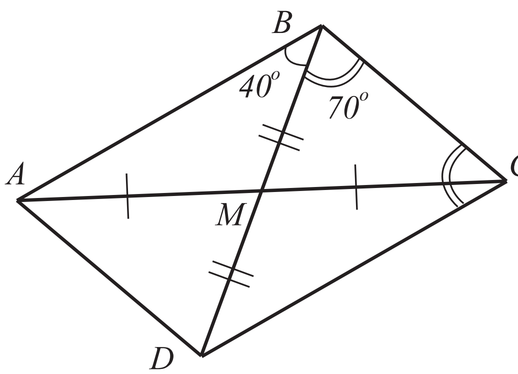
9.1. *Фёдор задумал натуральное число, нацело делящееся на 300, и выписал все его натуральные делители, кроме самого числа. Докажите, что сумма нечётных чисел, выписанных Фёдором, меньше суммы чётных.*

Решение: Заметим, что для каждого выписанного нечётного делителя A на доску выписан чётный делитель $2A$. (Число $2A$ не равно задуманному числу, так как задуманное число кратно 4, а число $2A$ — нет.) Значит, сумма чётных выписанных делителей по крайней мере в 2 раза больше суммы нечётных (на самом деле больше, чем в 2, поскольку в предыдущем доказательстве мы не учитывали делители, кратные 4, например, само число 4).

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верное доказательство	7 баллов
Утверждение задачи доказано на частных случаях чисел	0 баллов
Неверное решение или его отсутствие	0 баллов

9.2. *В треугольнике ABC провели медиану BM. Оказалось, что $\angle ABM = 40°$, $\angle MBC = 70°$. Найдите отношение $AB : BM$. Ответ обоснуйте.*



К решению задачи 9.2

Решение: Продолжим медиану BM за точку M и отложим на продолжении отрезок $MD = BM$ см. рисунок. В четырёхугольнике $ABCD$ диагонали точкой пересечения делятся пополам, поэтому этот четырёхугольник является параллелограммом. Тогда $\angle ABC + \angle BCD = 180°$, откуда $\angle BCD = 70° = \angle MBC = \angle DBC$. Это значит, что треугольник BCD равнобедренный, как и равный ему треугольник BAD. Тогда

$$AB : BM = AB : \frac{BD}{2} = AB : \frac{AB}{2} = 2.$$

Ответ: $AB : BM = 2$.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
Приведён пример треугольника, удовлетворяющего условиям задачи	0 баллов
Неверное решение или его отсутствие	0 баллов

9.3. *Числа x и y удовлетворяют равенству:*

$$\sqrt{xy}+\sqrt{(1-x)(1-y)}=\sqrt{7x(1-y)}+\frac{\sqrt{y(1-x)}}{\sqrt{7}}.$$

Найдите наибольшее значение выражения $x+7y$. Ответ обоснуйте.

Решение:

Способ 1. Проведём равносильные преобразования:

$$\sqrt{xy}+\sqrt{(1-x)(1-y)}=\sqrt{7x(1-y)}+\frac{\sqrt{y(1-x)}}{\sqrt{7}},$$

$$\sqrt{7}\left(\sqrt{xy}-\sqrt{7x(1-y)}\right)+\left(\sqrt{7(1-x)(1-y)}-\sqrt{y(1-x)}\right)=0,$$

$$\sqrt{7}\left(\sqrt{x}(\sqrt{y}-\sqrt{7(1-y)})+\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{7}}(\sqrt{7(1-y)}-\sqrt{y})\right)=0,$$

$$\sqrt{7}\left(\sqrt{y}-\sqrt{7(1-y)}\right)\left(\sqrt{x}-\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{7}}\right)=0,$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{y}-\sqrt{7(1-y)}=0,\\ 0\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{x}-\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{7}}=0,\\ 0\leqslant y\leqslant 1,\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=7/8,\\ 0\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}\\ \begin{cases}x=1/8,\\ 0\leqslant y\leqslant 1.\end{cases}\end{array}\right.$$

Тогда наибольшее значение выражения $x+7y$ равно $\dfrac{57}{8}$.

Способ 2. Числа x и y одного знака (иначе не существует $\sqrt{xy}$). Они не могут быть оба отрицательными (иначе не существуют корни, стоящие в правой части равенства. Если $x > 0$, то $y \leqslant 1$ (иначе не существует $\sqrt{7x(1-y)}$) и аналогично из неравенства $y > 0$ следует, что $x \leqslant 1$. Значит, $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $0 \leqslant y \leqslant 1$. При этих условиях возведём обе части уравнения в квадрат (переход равносильный, так как обе части уравнения неотрицательны):

$$xy + 2\sqrt{xy(1-x)(1-y)} + (1-x)(1-y) = \\ = 7x(1-y) + 2\sqrt{xy(1-x)(1-y)} + \frac{y(1-x)}{7},$$

$$7xy + 7(1-x)(1-y) = 49x(1-y) + y(1-x),$$

$$64xy - 56x = 8y - 7,$$

$$8x(8y-7) = 8y - 7,$$

откуда либо $y = \frac{7}{8}$ и $0 \leqslant x \leqslant 1$, либо $x = \frac{1}{8}$ и $0 \leqslant y \leqslant 1$. В первом случае наибольшее значение выражения $x + 7y$ достигается при $y = \frac{7}{8}$, $x = 1$ и равно $\frac{57}{8}$, во втором — при $x = \frac{1}{8}$, $y = 1$ и тоже равно $\frac{57}{8}$.

Ответ: $\dfrac{57}{8}$.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный и обоснованный ответ с указанием чисел x, y, при которых он достигается	7 баллов
Верный и обоснованный ответ без указания чисел x, y, при которых он достигается	6 баллов
При верном ходе решения имеется арифметическая ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу	6 баллов
Исходное уравнение верно сведено к уравнению вида $f(x,y) \cdot g(x,y) = 0$	3 балла
Верный ответ без обоснования	0 баллов

9.4. *От фирмы «Рога и копыта» после ее банкротства осталось 17 рогов, 2 копыта и одна гиря. Все это богатство поделили между собой равными по весу частями Паниковский и Балаганов, причем гиря целиком досталась Балаганову. Рога и копыта на части тоже не пилили. Каждый рог тяжелее каждого копыта и легче гири на одну и ту же величину. Сколько рогов и копыт у Паниковского? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.*

Решение: Пусть одно копыто весит k, а один рог $k + \delta$ (все веса в одних и тех же единицах измерения, например, в пудах). Тогда по условию гиря весит $k + 2\delta$, и общий вес разделённого имущества составляет $20k + 19\delta$. Каждому досталось $10k + 9{,}5\delta$. Балаганов взял гирю, а рогами и копытами набрал $9k + 7{,}5\delta$. Этот вес меньше, чем вес 9 рогов, но больше, чем вес 7 рогов и 2 копыт. Значит, Балаганов взял рогов меньше 9, но больше 7, то есть 8. 8 рогов весят $8k + 8\delta$, и на копыта Балаганову остаётся $k - 0{,}5\delta$, что меньше веса одного копыта. Значит, все копыта и все остальные рога у Паниковского. Попутно мы установили, что $k - 0{,}5\delta = 0$, то есть рог тяжелее копыта в 3 раза, и, соответственно, гиря тяжелее копыта в 5 раз.

Ответ: 9 рогов и 2 копыта.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и обоснованный ответ с выведенным соотношением весов рога, копыта и гири	7 баллов
Доказано, что все копыта достались Паниковскому	2 балла
Доказано, что у Балаганова могло быть только 9 рогов	2 балла
Задача решена для конкретно подобранных весов рогов, копыт и гири	0 баллов
Верный ответ без обоснования	0 баллов

9.5. *На экзамене каждому из трёх студентов был предложен один и тот же тест из* 40 *вопросов. Назовем вопрос* неподъёмным, *если на него все ответили неверно;* трудным, *если только один студент ответил верно,* лёгким, *если ответили верно ровно два студента, и* тривиальным, *если верно ответили все трое. Известно, что лёгких вопросов вдвое больше, чем неподъёмных. Каково наибольшее число неподъёмных вопросов может содержать тест, если общее число верных ответов равно* 64*? Ответ обоснуйте.*

Решение: Пусть x_3, x_2, x_1 и x_0 — количества тривиальных, лёгких, трудных и неподъёмных вопросов соответственно. Тогда условие задачи можно записать в виде системы:

$$\begin{cases} x_3 + x_2 + x_1 + x_0 = 40, \\ 3x_3 + 2x_2 + x_1 = 64, \\ x_2 = 2x_0. \end{cases}$$

Нас интересуют решения этой системы в целых неотрицательных числах. Выразим все переменные через x_0. Вычитая из второго уравнения системы первое, получаем равенство $2x_3 + x_2 - x_0 = 24$. С учётом третьего уравнения системы получаем $x_3 = 12 - 0{,}5x_0$. Тогда из первого уравнения системы имеем:

$$x_1 = 40 - x_3 - x_2 - x_0 = 40 - 12 + 0{,}5x_0 - 2x_0 - x_0 = 28 - 2{,}5x_0.$$

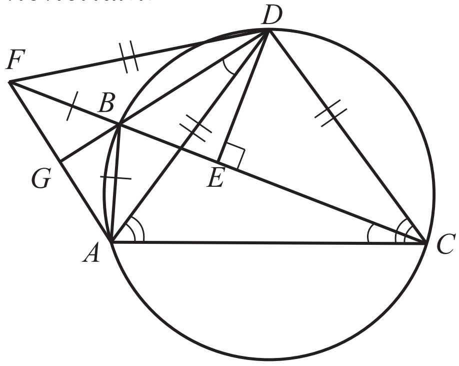
Чтобы последнее выражение было целым, необходимо и достаточно, чтобы число x_0 было чётным, а чтобы оно было неотрицательным — чтобы выполнялось неравенство $x_0 \leqslant \frac{28}{2{,}5} = 11{,}2$. Наибольшее число, удовлетворяющее обоим условиям — это число 10. Проверкой убеждаемся, что при $x_0 = 10$ получается допустимое решение системы: $x_0 = 10$, $x_1 = 3$, $x_2 = 20$, $x_3 = 7$.

Ответ: максимально может быть 10 неподъёмных вопросов.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и обоснованный ответ с приведённым примером количеств задач всех сложностей	7 баллов
Верный и обоснованный ответ без примера количеств задач всех сложностей	6 баллов
Выписана система уравнений, верно описывающая условия задачи	1 балл
Верный ответ без обоснования с приведённым примером количеств задач всех сложностей	1 балл
Верный ответ без обоснования	0 баллов

9.6. *Задача Архимеда.* *Пусть D — середина дуги AC, B — некоторая точка этой дуги, отличная от D. Докажите, что точка E — основание перпендикуляра, опущенного из точки D на ломаную ABC, делит длину этой ломаной пополам.*



К решению задачи 9.6, способ 1

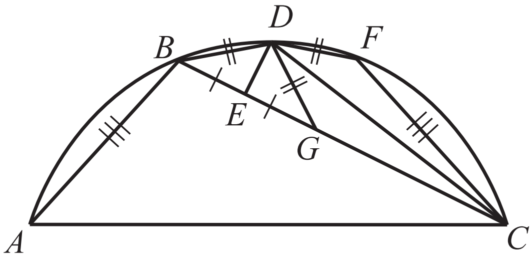
Решение:

Способ 1. Без ограничения общности считаем, что точка B лежит на той дуге AD, которая не содержит точки C. Тогда точка E лежит на хорде CB. Отметим на продолжении прямой CB за точку B такую точку F, что $AB = BF$ — см. рисунок. Тогда длина ломаной ABC равна длине отрезка CF, и наша цель — доказать, что точка E является серединой этого отрезка. Для этого достаточно показать, что $FD = DC$ и сослаться на свойство равнобедренного треугольника FCD. Заметим, что $DC = DA$, так как точка D — середина дуги AB.

Обозначим углы: $\angle DAC = \alpha$ и $\angle ACB = \beta$. Кроме того, продолжим отрезок DB за точку B до его пересечения с отрезком AF в некоторой точке G. Выразим через α и β нужные нам углы:

$$\angle DBA = 180^\circ - \angle DCA = 180^\circ - \alpha \text{ (так как четырёхугольник } ABDC \text{ вписанный);}$$
$$\angle ABG = 180^\circ - \angle ABD = \alpha;$$
$$\angle BAD = \angle BCD = \alpha - \beta \text{ (свойство вписанных углов);}$$
$$\angle BAC = \angle BAD + \angle DAC = 2\alpha - \beta;$$
$$\angle ABF = \angle BAC + \angle BCA = \text{ (как внешний угол треугольника } ABC\text{) } = 2\alpha;$$
$$\angle GBF = \angle ABF - \angle ABG = \alpha = \angle GBA.$$

Мы получили, что отрезок BG является биссектрисой равнобедренного треугольника ABF. Значит, $AG = GF$ и $AF \perp GB$. Но тогда в треугольнике ADF отрезок DG является одновременно высотой и медианой, что означает равнобедренность треугольника ADF и нужное нам равенство $FD = DA = DC$.



К решению задачи 9.6, способ 2

Способ 2. По-прежнему считаем, что точка B лежит на той дуге AD, которая не содержит точки C (точка E лежит на хорде CB). Так как дуги AD и DC равны, а дуга BD — часть дуги AD, точка D лежит на дуге BC ближе к точке B, чем к точке C. Тогда и точка E лежит на отрезке BC ближе к точке B, чем к точке C. Отметим на луче EC точку G так, что $BE = EG$, а на дуге DC точку F так, чтобы дуги DB и DF были равны — точки G и F попадут соответственно на отрезок EC и на дугу DC — см. рисунок. Тогда по свойству вписанных углов справедливо равенство

$$\angle FDC + \angle DCB = \angle DBC = \angle DGB.$$

С другой стороны, по свойству внешнего угла $\angle DGB$ треугольника BDG имеем $\angle DGB = \angle GDC + \angle DCB$. Сравнивая два полученных равенства, получим, что $\angle FDC = \angle GDC$. Но в таком случае из равенства $DF = DG$ следует равенство $FC = GC$ и, поскольку D — середина дуги AC, то $AB = FC = GC$, то есть точка E — середина ломаной CBA.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верное доказательство	7 баллов
Неверное решение или его отсутствие	0 баллов