9 класс

1. Число 400 разделили на четыре части так, что если к первой части прибавить 1, от второй отнять 2, третью умножить на 3, а четвёртую разделить на 4, то все результаты будут равными. На какие части разделили число 400?

Ответ: *62, 65, 21 и 252.*

Решение. Пусть $4x$ — последняя (четвёртая) часть числа. После деления её на 4 полученный результат, равный x, совпадает с третьей частью, умноженной на 3, потому третья часть числа — $\frac{x}{3}$. Если первую часть увеличить на 1, а вторую уменьшить на 2, — их сумма будет равна $x + x = 2x$. Значит, до изменения частей эта сумма была $(x - 1) + (x + 2) = 2x + 1$. Поскольку сумма всех частей равна 400, имеем уравнение

$$2x + 1 + \frac{x}{3} + 4x = 400, \quad \text{откуда} \quad x = 63,$$

то есть после изменения всех частей результат оказался равным 63. Теперь легко находятся начальные значения всех частей: 62, 65, 21 и 252.

Критерии. Только ответ — 2 балла. Правильно составлено уравнение — 2 балла. Решение с арифметическими ошибками — 4 балла. Критерии не суммируются. Полное решение — 7 баллов.

2. В школе учатся мальчики и девочки. Средний возраст мальчиков отличается от среднего возраста девочек, но среднее этих двух чисел совпадает со средним возрастом всех школьников. Кого в школе больше — мальчиков или девочек?

Ответ: *поровну.*

Решение. Пусть в школе учатся m мальчиков и d девочек, и пусть сумма возрастов всех мальчиков равна M, а сумма возрастов всех девочек равна D. Тогда средний возраст всех мальчиков — это $\frac{M}{m}$, средний возраст всех девочек — $\frac{D}{d}$, а средний возраст всех школьников — $\frac{M+D}{m+d}$. По условию,

$$\frac{M}{m} + \frac{D}{d} = 2 \cdot \frac{M + D}{m + d}\,.$$

Это равенство несложно преобразовать к виду $(d - m)(Md - Dm) = 0$. Поскольку $\frac{M}{m} \neq \frac{D}{d}$, то есть $Md \neq Dm$, заключаем, что $m = d$. Итак, мальчиков и девочек в школе одинаковое количество.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Правильно составлено уравнение для средних — 2 балла. Решение уравнения $(d - m)(Md - Dm) = 0$, в котором не разобран случай $Md = Dm$, — 6 баллов. Полное решение — 7 баллов.

3. Известно, что уравнения $x^2 + ax + b = 0$ и $x^3 + bx + a = 0$ имеют общий корень и $a > b > 0$. Найдите его.

Ответ: -1.

Решение. Домножим первое уравнение на x и вычтем из него второе. Общий корень исходных уравнений будет и корнем получившегося уравнения

$$(x^3 + ax^2 + bx) - (x^3 + bx + a) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a(x^2 - 1) = 0.$$

У последнего уравнения два корня — это 1 и -1. Если общий корень $x = 1$, то при подстановке его в каждое уравнение получим равенство $1 + a + b = 0$, которое в силу условия $a > b > 0$ выполняться не может, противоречие.

Если же общий корень $x = -1$, то при подстановке в уравнения получим $1 - a + b = 0$, которое не противоречит условию.

Замечание. Возможны и другие способы решения.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Не исключены лишние корни — снимаются 2 балла. Отсутствует проверка корня $x = -1$ на соответствие условию — снимаются ещё 2 балла. Упущен один из возможных корней — не более 3 баллов. Полное решение — 7 баллов.

4. В школьном турнире по шахматам соревновались мальчики и девочки, причём мальчиков было в 5 раз больше, чем девочек. По правилам турнира каждый шахматист играл с каждым другим *дважды*. Сколько всего игроков принимали участие, если известно, что мальчики набрали в сумме ровно в два раза больше очков, чем девочки? (За победу в шахматной партии начисляют 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за проигрыш — 0 очков.)

Ответ: 6 *игроков.*

Решение. Пусть в турнире принимали участие d девочек и $5d$ мальчиков. Тогда всего игроков было $d+5d = 6d$; играя по две партии каждый с каждым они сыграли между собой $2\cdot\frac{1}{2}\cdot 6d(6d-1) = 6d(6d-1)$ партий. Поскольку в каждой партии разыгрывается одно очко, общее число очков, набранных всеми участниками, также равно $6d(6d-1)$. Из них у мальчиков две третьих, а у девочек — одна треть общего количества очков, то есть у девочек $\frac{1}{3}\cdot 6d(6d-1) = 2d(6d-1)$ очков.

Заметим, что если каждая девочка выиграла у всех мальчиков, то вместе девочки набрали максимум $2\cdot d\cdot 5d = 10d^2$ очков, а играя между собой, девочки распределили $2\cdot\frac{1}{2}\cdot d(d-1)$ очков. Поэтому *наибольшее* количество очков, которое могли набрать девочки, равно $10d^2 + d(d-1) = 11d^2 - d$. Значит,

$$2d(6d-1) \leqslant 11d^2 - d \quad\iff\quad d^2 \leqslant d.$$

Следовательно, девочек не могло быть больше одной. Если девочка была одна, то мальчиков было пятеро, всего — 6 игроков. Шестеро ребят сыграли между собой $6\cdot 5 = 30$ партий и разыграли 30 очков. Девочка набрала 10 очков, выиграв у каждого из пяти мальчиков по две партии. Играя между собой, мальчики разыграли оставшиеся 20 очков.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Правильный пример — 2 балла. Подсчёт числа очков всех девочек — 2 балла. Оценка числа очков девочек — 4 балла. Критерии не суммируются. Полное решение — 7 баллов.

5. Точки O и I — центры описанной и вписанной окружностей треугольника ABC, M — середина дуги AC описанной окружности (не содержащей B). Известно, что $AB = 15$, $BC = 7$ и $MI = MO$. Найдите AC.

Ответ: $AC = 13$.

Решение. (Рис. 3). Сначала докажем, что $MI = MA$ (*лемма о трезубце*).

Действительно, внешний угол AIM треугольника AIB равен сумме углов BAI и ABI, и так как AI и BI — биссектрисы, то $\angle AIM = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B$. Угол IAM равен сумме углов IAC и CAM. Но $\angle IAC = \frac{1}{2}\angle A$, а $\angle CAM = \angle CBM = \frac{1}{2}\angle B$ — как вписанные.

Отсюда следует, что $\angle IAM = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B = \angle AIM$, и значит, треугольник AMI — равнобедренный, $MI = MA$. По условию $MO = MI$, поэтому по лемме о трезубце $AO = MO = MI = MA$. Значит, треугольник AOM — равносторонний и $\angle AOM = 60°$. Поскольку центральный угол AOM вдвое больше вписанного угла ABM, имеем $\frac{1}{2}\angle B = 30°$, то есть $\angle B = 60°$.

По теореме косинусов $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\cdot AB\cdot BC\cos 60° = 13^2$.

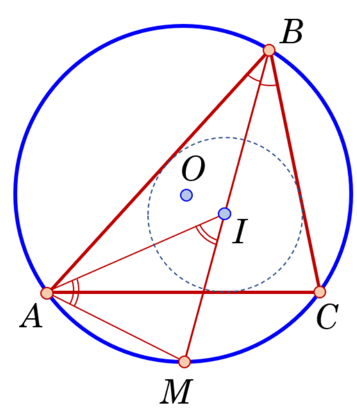

Рис. 3

Критерии. Ответ без объяснений — 0 баллов. Доказано, что угол B равен $60°$ — 5 баллов. За отсутствие доказательства леммы о трезубце баллы не снижаются. Полное решение — 7 баллов.