9 класс

9.1. Найдите все возможные пары простых чисел m и n, таких, что уравнение $x^2 - mx - n = 0$ имеет простой корень.

Ответ: $m = 2, n = 3$.

Решение. Предположим, что $x = p$ является простым корнем, тогда $p^2 - mp - n = 0$, откуда следует, что $n = p(p - m)$. Так как числа n и p простые, то $n = p$ и $p - m = 1$, то есть $p = m + 1$. Число m может равняться только 2, так как в любом другом случае $m + 1$ будет чётным, и тогда p не будет простым числом. Тогда $n = 3$, и искомое уравнение имеет вид $x^2 - 2x -$ 3 = 0.

Комментарии. Пример такого многочлена – 1 балл.

9.2. В таблице разрешается переставлять местами любые две строки друг с другом и любые два столбца. Можно ли с помощью нескольких таких операций получить из левой таблицы правую?

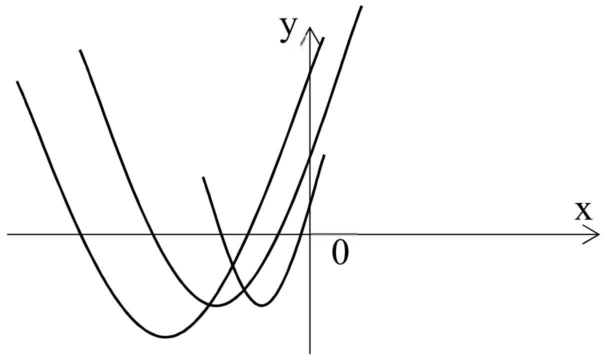
1	2	3
4	5	6
7	8	9

1	4	7
2	5	8
3	6	9

Ответ: нет.

Решение. Заметим, что как при перемене двух строк местами, так и при перемене двух столбцов местами числа 1 и 2 остаются в одной строке. Во второй таблице это не так, поэтому получить её не удастся.

9.3. Могут ли три параболы, изображенные на рисунке быть при каких-либо a, b, c графиками функций $y =$a$x^2 + bx + c, y = cx^2 + ax + b,$
$y = bx^2 + cx + a$?



Ответ: нет.

Решение. Предположим противное. Из рисунка видно, что все трехчлены имеют по два корня, следовательно $b^2 > 4ca, a^2 > 4bc$ и $c^2 > 4ab$, причем $\mathrm{a} > 0, \mathrm{b} > 0, \mathrm{c} > 0$ (ветви парабол направлены вверх). Перемножая полученные неравенства, приходим к противоречию: $a^2b^2c^2 > 64a^2b^2c^2$.

9.4. Имеется набор из 2021 числа. Причём известно, что если каждое число в наборе заменить на сумму остальных, то получится тот же набор. Докажите, что в наборе присутствует нуль.

Решение. Пусть сумма чисел в наборе равна M, тогда число a из набора заменяется на число $b = M - a$. Просуммируем эти равенства для всех a:

$$b_1 + \ldots + b_{2021} = 2021M - (a_1 + \ldots + a_{2021}),$$

откуда $M = 0$, так как $b_1 + \ldots + b_{2021} = a_1 + \ldots + a_{2021} = M$. Значит, для любого a число $b = -a$ также входит в набор и все числа разбиваются на пары $(a, -a)$. Из нечётности их количества следует, что в набор входит число $a = -a$, то есть $a = 0$.

9.5. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC точка K середина, а на катете BC точка M такая, что $BM{:}MC = 2{:}1$. Пусть P – точка пересечения отрезков AM и CK. Докажите, что прямая KM касается окружности, описанной около треугольника AKP.

Решение. Пусть T середина отрезка MB, тогда по теореме обратной теореме Фалеса, прямые AM и KT параллельны, поэтому $\angle KAM = \angle BKT$. Так как точка K – середина гипотенузы прямоугольного треугольника ABC, то $KC = KB$, и, следовательно $\angle KCB = \angle KBC$. Тогда треугольники TBK и MCK равны по двум сторонам и углу между ними, откуда следует равенство углов:

$\angle CKM = \angle BKT = \angle KAM$. Значит угол $\angle CKM$ между хордой KP и прямой KM равен вписанному углу KAP, опирающемуся на эту хорду, тогда, прямая KM – касательная к окружности, проходящей через точки A, K, P, что и требовалось доказать.