ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

Муниципальный этап. Ответы и решения.

9 класс

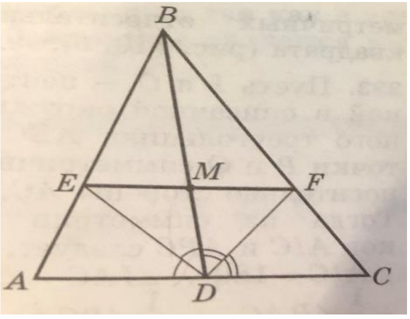
9.1. Ответ. Не существуют.

Решение. Пусть такие пять чисел существуют, и эти числа $N-2$, $N-1$, N, $N+1$, $N+2$. Заметим, среди пяти последовательных натуральных чисел есть число, делящееся на 5. Сумма этих пяти чисел равна $5N$, т.е. тоже делится на 5. Значит, если к сумме этих пяти чисел прибавить их произведение, то результат будет делиться на 5. Но число, заканчивающееся на 2021, на 5 не делится – противоречие.

9.2. Ответ. 80 %.

Решение. Пусть стоимость 1 кг ягод в начале сезона x руб, а 1 кг сахара – y руб. Пусть для приготовления варенья понадобится u кг ягод и v кг сахара. Тогда, в соответствии с условием задачи, для приготовления варенья по одному и тому же рецепту будет затрачено в начале сезона $xu+yv$ руб., а в конце сезона $0{,}85xu+1{,}1yv$ (руб). Так как приготовление варенья в середине сезона будет дешевле на 10 %, то получим $0{,}85xu+1{,}1yv=0{,}9xu+0{,}9yv$. Откуда $xu=4yv$. Тогда отношение стоимости ягод к стоимости варенья в начале сезона составляет: $\frac{xu}{xu+yv}\cdot 100\%=\frac{4yv}{5yv}\cdot 100\%=80\%$.

9.3. Решение.



По свойству биссектрисы для треугольников ABD и CBD можно записать: $BA:EA=BD:DA=BD:DC=BF:FC$. Значит, по обратной тереме Фалеса $EF \parallel AC$,, откуда $EM:MF=AD:DC=1:1$, т.е. DM – медиана треугольника EDF. Но $\angle EDF=\angle EDB+\angle FDB=\frac{1}{2}\angle ADB+\frac{1}{2}\angle CDB=\frac{1}{2}(\angle ADB+\angle CDB)=90°$. Таким образом, $DM=\frac{1}{2}EF$ по свойству медианы прямоугольного треугольника.

9.4. Решение. Достаточно выявить два самых легких камня и один самый тяжелый и сравнить их. Разобьем камни на 4 пары и сравним в парах: легкие положим в одну кучку, тяжелые – в другую. Разобьем 4 легких камня на 2 пары и сравним. Наконец, сравним более легкие камни в этих парах. За 7 взвешиваний нашли самый легкий камень Л. Кроме того, самый легкий из оставшихся – это один из трех, сравнивавшихся с Л. Выявим его за два взвешивания. Самый тяжелый – один из 4 камней тяжелой кучки. Выявим его за 3 взвешивания. Итого 7 + 2 + 3 = 12 взвешиваний, плюс одно сравнение двух легких с тяжелым.

9.5. Ответ. 7 очков.

Решение. В матче, где одна из команд победила, команды вместе набирают 3 очка, в матче, закончившемся вничью, - 2 очка. Поскольку 7 не делится на 3, команда, набравшая 7 очков, сделала хотя бы одну ничью. Так как таких команд пять, ничьих в турнире было сделано по крайней мере три. Всего матчей, как легко проверить, было сыграно 15. Поэтому все команды вместе набрали не более чем 2·3 + 3·12 = 42 очка. Из них 35 очков набрали команды А. Б, В, Г и Д. Поэтому команда Е набрала не больше 42 – 35 = 7 очков. Как она могла набрать ровно 7 очков, показано в таблице.

	А	Б	В	Г	Д	Е
А	х	3	3	1	0	0
Б	0	х	3	3	1	0
В	0	0	х	3	3	1
Г	1	0	0	х	3	3
Д	3	1	0	0	х	3
Е	3	3	1	0	0	х