Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2021 – 2022 учебный год

Решения и указания

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов. При неполном решении задачи, баллы обычно выставляются пропорционально тому, какой процент полезных интеллектуальных усилий, нужных для её решения, был затрачен. Например, не следует вообще давать баллы за рассмотрение легких частных случаев, которые никак не проясняют общей картины.

За задачи, которые решены почти полностью, но в решении которых допущены мелкие ошибки (скажем, арифметические), мы рекомендуем вычитать один или два балла в зависимости от характера допущенной ошибки.

Следует отметить, что проверка решений задач и выставление баллов является в любом случае процессом **творческим** и не до конца поддаётся формализации. Поэтому трудно дать рекомендации, охватывающие все возможные ситуации, которые могут возникнуть в ходе проверки. Решения задач, полученных учениками, безусловно, могут отличаться от авторских. Единственным критерием в этом случае является правильность рассуждений.

Некоторые предложения по выставлению баллов, касающиеся отдельных задач, приведены ниже.

В тех задачах, где требуется построить какой-либо пример, не обязательно приводить рассуждения о том, как именно он был получен. В случае, если правильность примера легко проверяется, его достаточно всего лишь предъявить. К этой группе задач относятся VII.5, VIII.2 (где желательно хотя бы краткое обоснование). Однако во многих задачах, помимо верного примера, нужно бывает обосновывать или единственность найденного решения (как в числовом ребусе), или тот факт, что найденное число является наименьшим возможным.

Задачи VII.1, VII.4, VIII.1, VIII.3, VIII.4, X.1, X.4, XI.5 относятся к числу обычных школьных. Их оценка должна производиться в соответствии с обычной практикой. Максимальный балл даётся за полное решение.

В задаче VII.2 за верный ответ в решении числового ребуса, без обоснования единственности решения, присуждается 3 балла. То же самое касается задачи VII.3, если верный ответ указан, но не обоснован.

В задаче VIII.5 баллы даются только при наличии полного обоснования. За использование идеи раскраски можно давать 1 балл.

В задаче IX.1 за верную идею подсчёта можно давать до 3 баллов, если в вычислениях допущены ошибки. При этом, если у кого-то фигурирует допущение, что двузначное число может начинаться с нуля (что является грубой ошибкой), а всё остальное верно, даётся не более 1 балла.

В задаче IX.2 требуется полное обоснование ответа.

В задаче IX.3 за оба найденных варианта без обоснования можно давать до 3 баллов.

За верный ответ в задаче IX.4 можно давать до 2 баллов. Если разобран пример с 17 серединами, можно давать до 3 баллов.

В задаче XI.5 за пример с 13 кораблями даётся 2 балла.

В задаче X.2 за верный пример (без обоснования) можно давать до 3 баллов.

В задачах X.3, XI.3 за верное нахождение двух пар корней можно присуждать до 3 баллов.

В задаче X.5 за попытки указать конкретную стратегию игры, но без полного и точного обоснования, баллы не присуждаются.

В задаче XI.1 баллы не присуждаются за использование приближённых вычислений с десятичными цифрами. Применение формул сокращённого умножения, с точным сравнением квадратных корней, вполне допустимо.

В задаче XI.2 годится любая логически обоснованная схема с двумя взвешиваниями.

За задачу XI.4 можно давать до 1 балла за полное рассмотрение одного или нескольких частных случаев (например, чисел, составленных из заданного набора цифр типа 1, 2, 3 с полным анализом всех остатков).

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2021 – 2022 учебный год

9 класс (решения)

1. Ответ: 13 чисел.

   Пусть первое число равно $10a + b$. Тогда второе равно $10b + a$, где $a > b > 0$. Разность равна $9(a - b)$, откуда следует, что разность $a - b$ является точным квадратом. Значение разности может быть равно 1 или 4. Для первого случая имеем 8 значений для большего из чисел (21, 32, ... , 98), когда разность равна 3^2, а для второго случая имеется 5 значений (51, 62, 73, 84, 95), когда разность равна 6^2. Итого 13 чисел.

2. Ответ: нет, нельзя.

   Предположим, что есть две строки, заполненные одинаково. Среди трёх чисел строки есть два одинаковых. Выбираем столбцы, в которых стоят эти числа. Тогда на пересечении получается четыре одинаковых числа.

   Пусть теперь повторений строк не имеется. Всего имеется 8 различных вариантов заполнить строку: 000, 001, ... , 111. У нас строк 7, то есть присутствуют все варианты кроме одного. В частности, есть строка 000 или 111. Оба варианта аналогичны; рассмотрим первый из них.

   Ясно, что найдётся либо строка 001, либо 010, так как оба варианта отсутствовать не могут. Берём два столбца с нулями, и на пересечении двух строк со столбцами получается четыре нуля.

3. Ответ: двумя способами.

   Ясно, что трёхзначных слагаемых быть не может, а также должно быть хотя бы одно двузначное, так как сумма всех цифр равна 45. Пусть двузначное слагаемое одно, и мы сгруппировали цифры $a + 1$ и a. Тогда двузначное слагаемое равно $10(a + 1) + a = 11a + 10$, а сумма остальных цифр равна $45 - (a + 1) - a = 44 - 2a$. Итого получается $11a + 10 + 44 - 2a = 99$, то есть $a = 5$. Это даёт решение $9 + 8 + 7 + 65 + 4 + 3 + 2 + 1 = 99$.

   Пусть теперь двузначных слагаемых два. Будем считать, что в одном случае мы сгруппировали цифры $b+1$ и b, а в другом $a+1$ и a, где $b > a+1$. Двузначные числа равны $11b+10$ и $11a+10$ соответственно, а сумма однозначных слагаемых составляет $45-(2b+1)-(2a+1)=43-2(a+b)$. Вместе имеем $11(a+b)+20+43-2(a+b)=99$, откуда $a+b=4$. Подходит только один вариант $a=1$, $b=3$, что даёт второе решение $9+8+7+6+5+43+21=99$.

Больше решений нет, так как сумма трёх двузначных слагаемых будет не меньше $65+43+21$, что превышает 99.

4. Ответ: 17 середин.

   Рассмотрим случай, когда точки лежат на одной прямой. Введём на ней координаты, и пусть для точек получилось $a_1<\dots<a_{10}$. Рассмотрим середины отрезков с участием a_1. Их девять, и они образуют возрастающую последовательность $\frac{a_1+a_2}{2}<\frac{a_1+a_3}{2}<\dots<\frac{a_1+a_{10}}{2}$. Аналогично рассмотрим середины отрезков с участием a_{10}. Их также девять, и они образуют последовательность $\frac{a_1+a_{10}}{2}<\frac{a_2+a_{10}}{2}<\dots<\frac{a_9+a_{10}}{2}$. Наибольшее число первой последовательности совпадает с наименьшим числом второй, и вместе мы имеем 17 попарно различных середин. Всего середин, тем самым, не менее 17.

   Если взять точки с чётными координатами 2, 4, 6, ... , 20, то серединами окажутся все точки с целыми координатами от 3 до 19 включительно, и их ровно 17.

   Теперь рассмотрим общий случай расположения точек на плоскости. Проведём прямые через все пары точек, и рассмотрим прямую, не перпендикулярную ни одной из этих прямых. Тогда в проекции на данную прямую все точки окажутся различными. Середина при проекции переходит в середину, а для точек на прямой мы имеем не менее 17 различных середин. Значит, всего середин было не меньше.

5. Ответ: 13.

   Один из примеров расположения 13 кораблей представлен на рисунке:

	x	x		x	x		x	x	
	x	x		x	x		x	x	
	x	x		x	x		x	x	
	x		x		x		x		
	x		x		x		x		

   Докажем, что большее число кораблей расположить невозможно. Для каждого прямоугольника 1×2 рассмотрим две пары параллельных линий, отстоящих во внешнюю сторону от его контура на расстояние $1/2$. Они задают прямоугольник 2×3 площадью 6. Также для каждой из сторон квадрата 10×10 рассмотрим линии на расстоянии $1/2$ от контура квадрата, расположенные внутри него.

Будем говорить, что нами сделаны обрамления. Из условия задачи следует, что обрамления прямоугольников и квадрата не могут накладываться друг на друга. Поэтому все обрамления кораблей содержатся во внутреннем квадрате 9×9. Если кораблей было k, то их суммарная площадь вместе с обрамлениями не больше площади внутреннего квадрата: $6k \leq 81$. Отсюда ясно, что $k \leq 13$.