Ключи муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике
2021-2022 учебный год
9 класс
Продолжительность олимпиады: 235 минут.

Код участника:____________________

Критерии оценивания работ участников:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

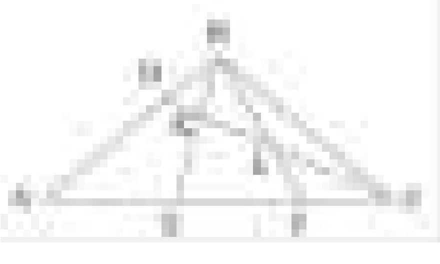
Максимально возможное количество баллов за каждое задание: 7 баллов
Максимальное количество баллов по всем возрастным параллелям – 35 баллов.
Итог подводится по сумме баллов, набранных участником.

9.1. Какое наибольшее количество различных натуральных чисел можно выбрать так, чтобы сумма любых трех из них была простым числом?

Решение. Одним из примеров четырех чисел, удовлетворяющих условию задачи, служат числа 1, 3, 7, 9. Действительно, числа 1+3+7=11, 1+3+9=13, 1+7+9=17, 3+7+9=19 являются простыми.
Предположим, что удалось выбрать пять чисел. Рассмотрим остатки этих чисел при делении на 3. Если среди остатков есть три одинаковых, то сумма соответствующих им чисел делится на 3. Если же трех одинаковых остатков нет, то каждый из остатков 0, 1 или 2 должен присутствовать. Тогда сумма трех чисел, имеющих различные остатки от деления на 3, делится на 3. При этом эта сумма не равна 3, так как все числа – различные и натуральные. Значит, эта сумма составное число.
Существуют и другие примеры, например, 3,7,9,31 и др.
Ответ: 4 числа

Критерии. 7 баллов – верное, обоснованное решение; 5 баллов – приведена верная оценка без примера; 2 балла – приведен верный ответ и пример; 0 баллов – приведен только верный ответ.

9.2. В треугольнике ABC CD – биссектриса угла ACB, AB = BC, BD = BK, BL = CL. Докажите, что BF – биссектриса угла CBE.
Решение.



Обозначим $\angle BCD = \angle DAC = x$. Тогда $\angle BAC = 2x$.
$\angle BDC = \angle DAC + \angle DCA = 3x \Rightarrow \angle BKD = 3x$ (треугольник BDK – равнобедренный). Для треугольника BKC $\angle BKD$ – внешний, откуда $\angle KBC = \angle BKD - \angle BCK = 2x$. Так как $BL = LC$, $\angle LBC = \angle BCL = x$, т.е. BL – биссектриса в треугольнике KBC, а значит BF – биссектриса угла CBE.

9.3. Решите уравнение:

$$1+\frac{3}{x+3}\left(1+\frac{2}{x+2}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)\right)=x.$$

Решение.

$1+\frac{1}{x+1}=\frac{x+2}{x+1}$, поэтому данное уравнение равносильно уравнению $1+\frac{3}{x+3}\left(1+\frac{2}{x+1}\right)=x$ при условии, что $x \neq -2$. Действуя аналогично, получим, что $1+\frac{3}{x+3}=x$, где $x \neq -2$ и $x \neq -3$. Корнями этого уравнения являются числа 2 и -2, значит корнем исходного уравнения является только число 2.

Критерии проверки

- Приведен только верный ответ – 1 балл.
- Верный ход решения, но не отброшен посторонний корень – 3 балла.

9.4. У разбойников есть 13 слитков золота. Имеются весы, с помощью которых можно узнать суммарный вес любых двух слитков. Придумайте, как за 8 взвешиваний выяснить суммарный вес всех слитков.

Решение.

Возьмем три первых слитка и взвесим их попарно: C1+C2, C1+C3, C2+C3, затратив три взвешивания. Сложив результаты этих взвешиваний и поделив пополам, найдем суммарный вес этих трех слитков: ((C1+C2) +(C1+C3) +(C2+C3))/2 = C1+C2+C3. За оставшиеся пять взвешиваний найдем вес остальных 10 слитков: объединим их в 5 пар и взвесим каждую пару.

Критерии. Правильные взвешивания и объяснение, как по их результатам узнать суммарный вес слитков – 7 баллов.
Если используется запрещенное взвешивание (например, в какой-то момент взвешивается только один слиток) – 0 баллов.

9.5. Проведено три семейства параллельных прямых, по 10 прямых в каждом. Какое наибольшее число треугольников они могут вырезать из плоскости?

Решение. Рассмотрим 100 узлов — точек пересечения прямых первого и второго направлений. Разобьем их на 10 уголков: первый уголок – узлы, лежащие на первых прямых первого и второго направления. Второй – лежащие на вторых прямых (кроме точек, лежащих в первом уголке) и т. д. Треугольники со сторонами, параллельными трем фиксированным направлениям, могут иметь две ориентации, причем каждый из наших 100 узлов может быть вершиной не более одного треугольника каждой ориентации. Поэтому 10 прямых третьего направления образуют не более $2 \cdot 25$ треугольников с последними пятью уголками, так как эти пять уголков содержат всего 25 узлов.
Заметим далее, что каждая из прямых третьего направления образует не более одного треугольника каждой ориентации с узлами, принадлежащими одному уголку. Поэтому

треугольников, имеющих вершины в узлах остальных пяти уголков, будет не больше $10 \cdot 2 \cdot 5$.
Итого треугольников не более $100 + 50 = 150$.
Пример со 150 треугольниками приведен на рисунке.
Ответ*:* 150 треугольников