

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников
2020 – 2021 учебный год
Математика
10 класс

Уважаемый участник олимпиады!

Время выполнения заданий - **4 часа (240 минут)**.

Выполнение заданий целесообразно организовать следующим образом:

- не спеша, внимательно читайте задания;
- не забывайте переносить решения в чистовик, черновики не проверяются;
- решение каждой задачи начинайте с новой страницы;
- задача считается решенной, если в ней приведено полное доказательство или обоснование ответа;
- после выполнения заданий еще раз удостоверьтесь в правильности записанных ответов и решений.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Итог подводится по сумме баллов, набранных участником.

Вам предстоит решить **5 задач**:

10.1. Рассматриваются функции вида $y = x^2 + ax + b$, где $a + b = 2021$. Докажите, что графики всех таких функций имеют общую точку.

10.2. В произведении пяти натуральных чисел каждый сомножитель уменьшили на 3. Могло ли произведение при этом увеличиться ровно в 15 раз?

10.3. (a_n) — арифметическая прогрессия с разностью 1. Известно, что S_{2022} — наименьшая среди всех S_n (меньше суммы первых n членов для любого другого значения n). Какие значения может принимать первый член прогрессии?

10.4. Может ли сумма 100 последовательных натуральных чисел оканчиваться той же цифрой, что и сумма следующих 98 чисел?

10.5. Окружность ω описана около остроугольного треугольника ABC . На стороне AB выбрана точка D , а на стороне BC — точка E так, что $AC \parallel DE$. Точки P и Q на меньшей дуге AC окружности ω таковы, что $DP \parallel EQ$. Лучи QA и PC пересекают прямую DE в точках X и Y соответственно. Докажите, что $\angle XBY + \angle PBQ = 180^\circ$.