

Всероссийская олимпиада школьников 2021/2022 уч. г.
Муниципальный этап
Математика
10 класс

Общее время выполнения работы – 3 часа 55 минут (235 минут).

Максимальная сумма баллов 35.

Во время Олимпиады участники не имеют права общаться друг с другом, свободно перемещаться по аудитории; не вправе пользоваться справочными материалами, средствами связи и электронно-вычислительной техникой. При установлении факта нарушения участником Олимпиады Порядка или использования во время тура запрещенных источников информации решением Оргкомитета такой участник лишается возможности дальнейшего участия в Олимпиаде.

Задание 10.1

Докажите, что для любого простого числа $p > 2$ числитель дроби

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p-3} + \frac{1}{p-2} + \frac{1}{p-1} \text{ делится на } p.$$

Количество баллов 7

Задание 10.2

В десятичной записи числа $\frac{1}{7}$ зачеркнули 2021-ю цифру после запятой (а другие цифры не меняли). Как изменилось число: увеличилось или уменьшилось?

Количество баллов 7

Задание 10.3

Даны две одинаковые шестерёнки с 13 зубьями каждая. Их наложили друг на друга так, что зубья совпали (так что проекция на плоскость выглядит как одна шестерёнка). После этого четыре пары совпадающих зубьев выпилили. Всегда ли можно повернуть эти шестерёнки друг относительно друга так, чтобы проекция на плоскость выглядела как одна целая шестерёнка? (Шестерёнки можно поворачивать, но нельзя переворачивать.)

Количество баллов 7

Задание 10.4

В клетках квадратной таблицы 4×4 расставлены числа $+1$ и -1 , как показано на рисунке. Разрешается одновременно менять знаки у чисел во всех клетках, расположенных в одной строке, в одном столбце или на прямой, параллельной какой-нибудь диагонали (в частности, можно менять знак числа в любой угловой клетке). Докажите, что, сколько бы мы ни производили таких перемен знака, нам не удастся получить таблицу из одних положительных чисел.

+1	+1	+1	+1
+1	+1	+1	+1
+1	+1	+1	-1
+1	+1	+1	+1

Количество баллов 7

Задание 10.5

Высоты AD и BE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Окружность, описанная около треугольника AH , пересекает стороны AC и BC в точках F и G соответственно. Найдите FG , если $DE = 5$ см.

Количество баллов 7